

Strömungsprobleme der Mechanische Verfahrenstechnik

Folien zur Vorlesung

NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH!

PD Dr.-Ing. habil. Frank Babick, 1. April 2025

5. Turbulente Strömungen

Lernziele zu Kapitel 5

- Wissen:
 - Eigenschaften turbulenter Strömungen
 - Makro- und Mikroturbulenz
 - Turbulenzmodelle
 - Modelle des turbulenten Strömungsklassierens
- Fähigkeiten:
 - Verstehen von Turbulenzmodellen
 - Berechnen der spezifischen Dissipationsrate
 - Berechnung des turbulenten Strömungsklassierens

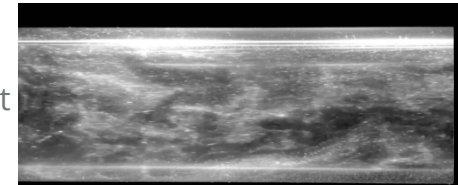
5.1 Turbulente Strömungen

- Grundlagen -

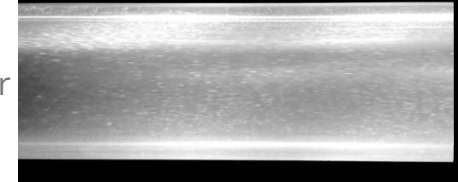
Turbulenz

- stochastische Bewegung makroskopischer Fluidsegmente → Quervermischung
- Merkmale turbulenter Strömungen
 - instationär (Grundströmung + fluktuierende Komponente)
 - dreidimensional
 - enthalten Wirbel
 - starke Durchmischung
 - makroskopisch: ausgeglichene v-, T-, c- Profile
 - mikroskopisch: hohe Gradienten (Dissipation)
 - kohärente Strukturen (d.h. zeitlich und räumliche Periodizität)
- Unterscheidung zwischen
 - Makroturbulenz und Mikroturbulenz
 - freie Turbulenz und Wandturbulenz

turbulent

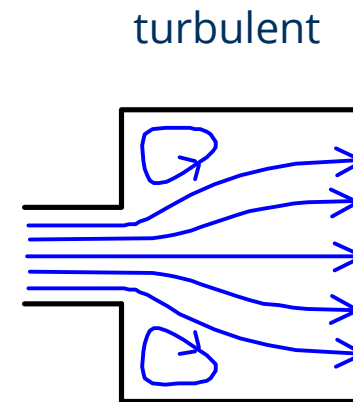
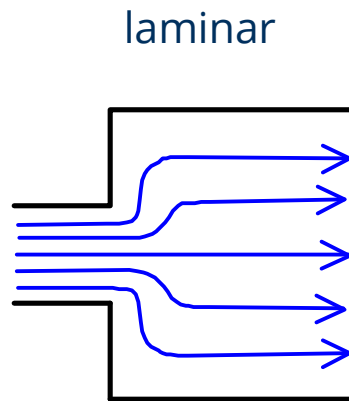


laminar



Künnen et al., *Nature Phys* 14:386-390, **2018**; doi:10.1038/s41567-017-0018-3

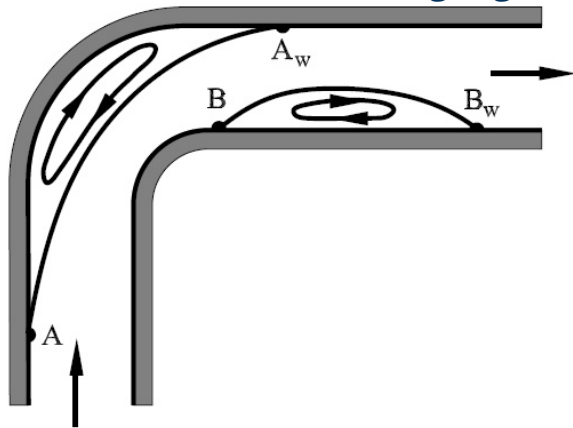
Wirbelbildung bei Querschnittserweiterung



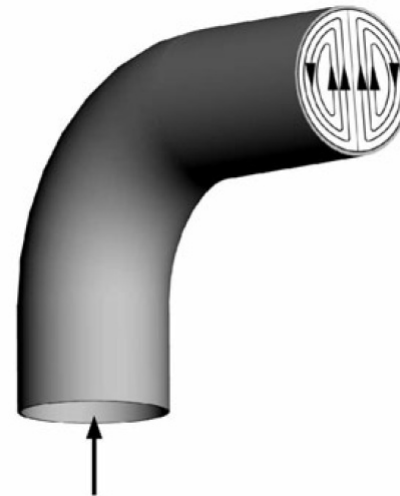
- Strömungsabriss
 - Trägheit der Strömungselemente \gg abbremsende Reibungskräfte (das heißt: für hohe Re-Zahlen)
 - Wirbelbildung
- z.B. bei plötzlicher Strahlerweiterung

Wirbelbildung in Krümmern

Wirbelbildung an äußerer Krümmung
und am Krümmerausgang



Sekundärströmung am Krümmerausgang



- Strömungsabriss
 - Trägheit der Strömungselemente \gg abbremsende Reibungskräfte (das heißt: für hohe Re-Zahlen)
→ Wirbelbildung
- z.B. bei Richtungsänderung in Krümmern

Bildquelle: Oertel et al., *Strömungsmechanik*. Vieweg+Teubner, **2011**; Abb. 2.110+2.111

Wirbelbildung im Nachlauf von Turbinen, Gebläsen etc.



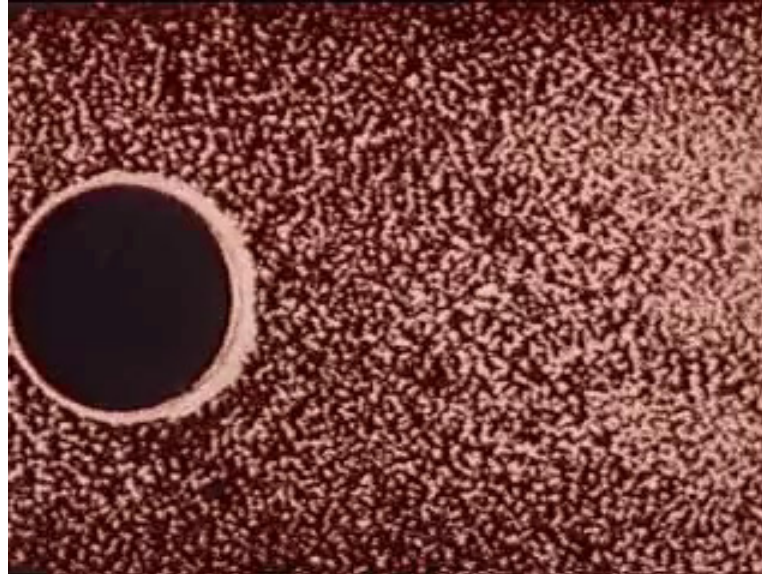
Bildquelle: <http://graphics8.nytimes.com/images/2007/06/12/business/12turbulence.600.1.jpg>

Wirbelbildung im Nachlauf von Turbinen, Gebläsen etc.



Bildquelle: <https://transitionofthoughts.com/2014/08/02/turbulent-times/>

Wirbelbildung am umströmten Partikel



Der von Ludwig Prandtl in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts aufgenommene Film zeigt die Visualisierung der Strömung um einen Zylinder mit Hilfe von Eisenglimmerplättchen. Beim Anfahren löst sich die Grenzschicht von der Zylinderoberfläche, es bilden sich hinter dem Zylinder Wirbel, die dann von der Strömung weggetragen werden. Dahinter bilden sich dann erneut Wirbel (aus G.M. Homsy et al., Multi-Media Fluid Mechanics CD-ROM, Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

5.2 Turbulente Strömungen

- Kennzeichnung turbulenter Strömungen -

Kennzeichnung von turbulenten Strömungen

- Schwankungsgeschwindigkeit

- Geschwindigkeitsfeld:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad \overline{\mathbf{u}'} = \mathbf{0}$$

- eff. Schwankungsgeschw.:

$$u'_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}{3} dt}$$

- Turbulenzgrad Tu :

$$Tu = \frac{u'_{\text{eff}}}{\bar{u}}$$

- Energie

- Turbulenzenergie K :

$$K = \frac{1}{2} \cdot (\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2}) \quad (\text{zeitlich gemittelt})$$

- vol.-spezif. Dissipationsrate ε_V : $\varepsilon_V = P_{\text{kin}}/V = \text{lokale Schubspannung} \times \text{lokale Scherrate}$

- massenspez. Dissipationsrate ε : $\varepsilon = P_{\text{kin}}/m = \varepsilon_V/\rho$

- Wirbelgröße

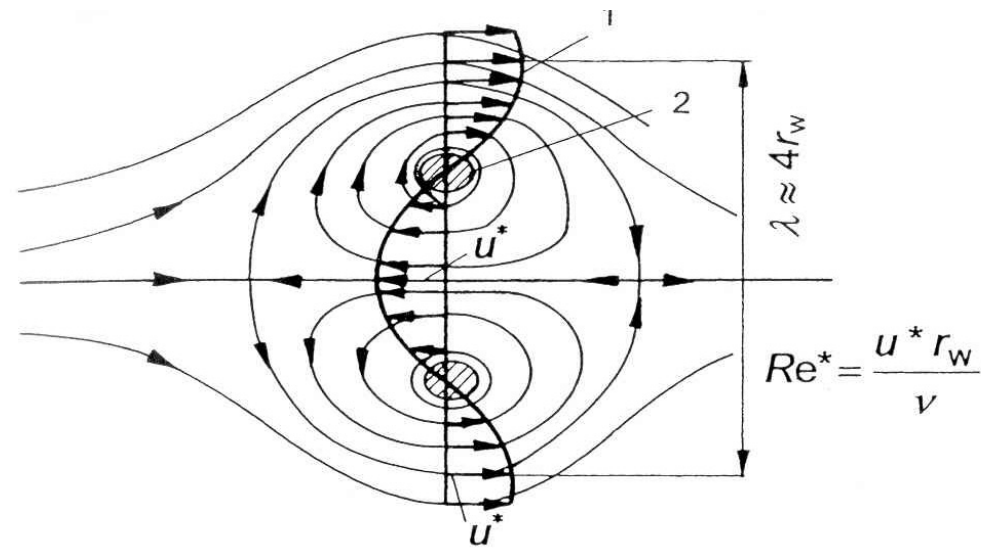
- Wirbelradius r_w

- Wellenlänge λ

- Wellenzahl k

- Makromaßstab Λ

Doppelwirbel

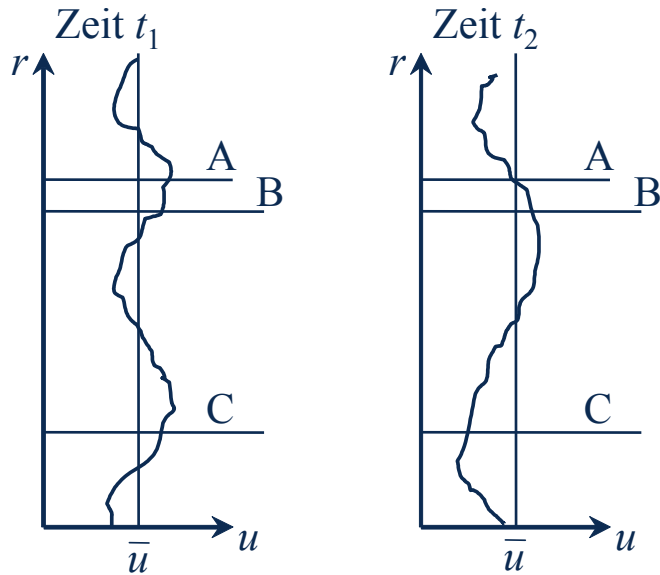


- Doppelwirbel nach Oseen
- Wellenlänge $\lambda = 4 \times r_w$
- Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$

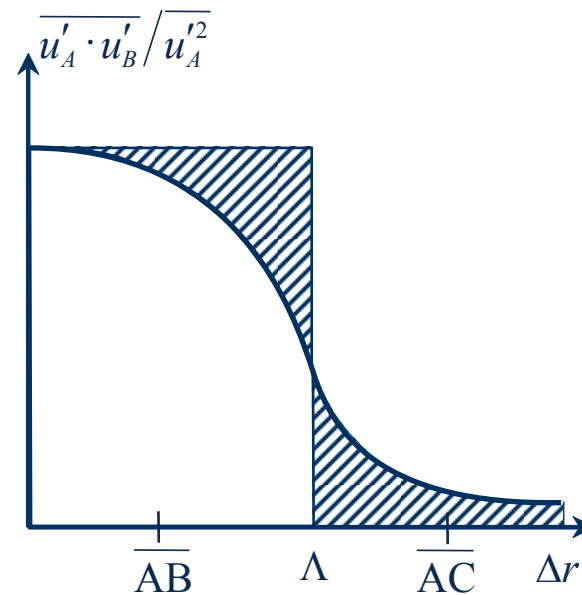
Bildquelle: H. Schubert, *Handbuch der Mechan. Verfahrenstechnik*, Bd. 1; Wiley-VCH, **2003**; S. 157.

Makromaßstab turbulenter Strömungen

zeitliche und räumliche Fluktuation
der Geschwindigkeit



räumliche Korrelationsfunktion der
Fluktuationsgeschwindigkeit



Makromaßstab:

$$A = \frac{1}{u'^2} \int_0^{\infty} \overline{u'_A \cdot u'_B} d\Delta r$$

5.3 Turbulente Strömungen

- *Berechnungsansätze und Turbulenzmodelle* -

Navier-Stokes-Gleichungen bei Turbulenz

Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS-Gleichungen)

- N-St-Gl.:
$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$
- + Kontinuitätsgl.:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad |\cdot \mathbf{u}$$
- modifiz. N-St.-Gl.
$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$
- in x-Richtung:
$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_x \mathbf{u}) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u_x$$

mit $\nabla^2 = \Delta$, $u_x = \bar{u}_x + u'_x$ und $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$
- zeitlich gemittelt:
$$\frac{\partial \rho \bar{u}_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}_x \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho \overline{u'_x \mathbf{u}'}) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 \bar{u}_x$$
- Umstellen:
$$\frac{\partial \rho \bar{u}_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}_x \bar{\mathbf{u}}) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\eta \cdot \nabla \bar{u}_x - \rho \overline{u'_x \mathbf{u}'})$$

Reynoldsspannung

- turbulente N-St-Gl.:
$$\frac{\partial \rho \bar{u}_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}_x \bar{\mathbf{u}}) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot \left(\eta \cdot \nabla \bar{u}_x - \underbrace{\rho \overline{u'_x \mathbf{u}'}}_{\text{Reynoldsspannung } \tau_t} \right)$$

(durch Turbulenz induzierte Spannung)

 - d.h.: 3 Gleichungen mit 6 Unbekannten
 - Lösung nur bei Einbeziehung von Turbulenzmodellen

- allgemeiner Lösungsansatz für die Reynoldsspannung (Boussinesq-Hypothese):

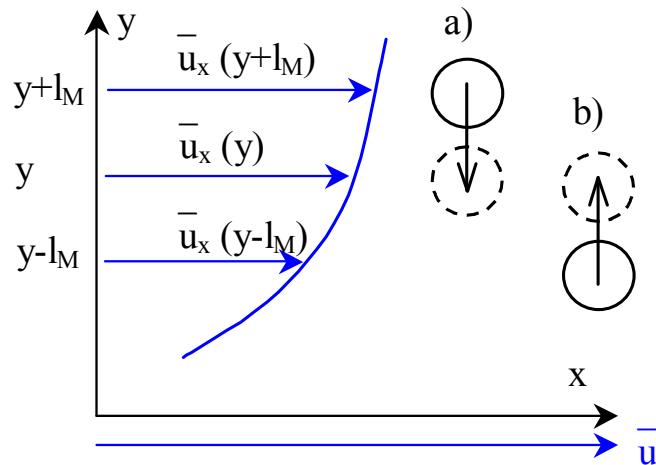
$$\tau_{ij,t} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \eta_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\eta_t \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \rho K) \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad K = \frac{1}{2} \sum \overline{u_i'^2}$$

- Turbulenzmodelle bieten zusätzliche Gleichungen zur Abschätzung der turbulenten Viskosität η_t

Prandtl'scher Mischungsweg (1)

- Grundgedanke:
 - Turbulenz = stochastische Bewegung von Wirbeln (Turbulenzelementen)
 - die einzelnen Turbulenzelemente behalten ihre Identität (Impuls, Wärme, Stoffkonzentration) nur über eine gewisse Wegstrecke
 - danach Auflösung und Abgabe von Impuls, Wärme und Substanz an die Grundströmung → lokale Fluktuation dieser Größen
 - durchschnittliche Wegstrecke = Mischungsweg
 - Analogie zur mittleren freien Weglänge der kinetischen Gastheorie
- Folgen:
 - Mischungsweg entscheidend für turbulente Transportprozesse
 - also auch für turbulente Viskosität, turbulenten Temperaturleitkoeffizient und turbulenten Diffusionskoeffizienten

Prandtl'scher Mischungsweg (2)



Geschwindigkeitsfluktuation an y im Fall a)

$$u'_x(y) = \bar{u}_x(y + l_M) - \bar{u}_x(y) \approx l_M \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} > 0$$

Geschwindigkeitsfluktuation an y im Fall b)

$$u'_x(y) = \bar{u}_x(y - l_M) - \bar{u}_x(y) \approx -l_M \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} < 0$$

Betrag der Schwankungsgeschwindigkeit:

$$|u'_x| = l_M \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|$$

- kleine $l_M \rightarrow u'_x$ klein \rightarrow geringe Turbulenz
- große $l_M \rightarrow u'_x$ groß \rightarrow hohe Turbulenz

Prandtl'scher Mischungsweg (3)

- turbulente Viskosität η_t bzw. ν_t

- Annahme isotroper Bedingungen:

$$u'_x = u'_y = u'_z$$

- Reynoldsspannung:

$$\overline{(\tau_{yx})_t} = \left| -\overline{\rho u'_x u'_y} \right| = \rho \cdot l_M^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|^2 \stackrel{!}{=} \eta_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$$

- turbulente Viskosität:

$$\eta_t = \rho \cdot l_M^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|$$

- turbulente Transportkoeffizienten

- Mischungsweg-Theorie:

$$\nu_t = D_t = a_t$$

- exp. für freie Turbulenz:

$$Pr_t = \frac{a_t}{\nu_t} = 0.7 \dots 1.0 \quad Sc_t = \frac{D_t}{\nu_t} = 0.7 \dots 1.0$$

- Mischungsweg l_M

- Prandtl: $l_M = \kappa \cdot y$, für Wandnähe gilt: $\kappa = 0,4$

- von Kármán: $l_M = \kappa \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} / \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} \right|$

K- ε-Modell

- zusätzliche Differentialgleichungen für

- spezif. Turbulenzenergie K
$$K = \frac{1}{2} \cdot (\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2})$$

- Transport-Bilanzgleichung: zeitliche Änderung in K resultiert aus konvektiven und diffusiven Transport (durch Reibung und Turbulenz) sowie aus Turbulenzproduktion und Dissipation

- Turbulenzdissipation ε
$$\varepsilon = \nu \sum_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2}$$
 spezifische Wärmeproduktion infolge der Turbulenz

- analog zur Turbulenzenergie ebenfalls eine Transport-Bilanzgleichung der Dissipation, zeitliche Änderung in ε resultiert aus konvektiven und diffusiven Transport sowie aus strömungsinduzierter Zunahme und Abnahme der Dissipation

- turbulente Viskosität:
$$\eta_t = C_\eta \cdot \rho \frac{K^2}{\varepsilon}$$

- Lösung erfordert i. d. R. numerische Methoden

5.4 Turbulente Strömungen

- Strömungen in Wandnähe und Rohrströmungen -

Strömung in wandnahen Bereichen

- unmittelbarer Wandbereich → Haftbedingung & quasi-laminare Schichtenströmung (viskose Unterschicht, $\eta_t \ll \eta$)
 - lineares Strömungsprofil: $u^+ = y^+ \quad y^+ < 5$
wobei $u^+ = \bar{u}/u_\tau \quad y^+ = y \cdot u_\tau/\nu \quad u_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$
- Wandnähe → Turbulenzgrad wächst mit Wandabstand
 - *logarithmisches Wandgesetz*: $u^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln y^+ + C^+ \quad 30 \leq y^+$
(turbulenzdominiert, $\eta_t \gg \eta$)
 $\kappa = 0.4$
 - Übergangsbereich ($\eta_t \approx \eta$): $u^+ = \alpha \cdot \ln y^+ + \beta \quad 5 < y^+ \leq 30$
wobei $C^+ = 5.5 \quad \alpha = 5.0 \quad \beta = -3.09$ (glatte Wand)
 $C^+ = 8.5 \quad \alpha = 6.7 \quad \beta = -5.78$ (vollrau)
- Beispiele:
 - überströmte Tragflügel, Windräder, Turbinenschaufeln
 - Kanal- und Rohrströmung (Wandeffluss über dem gesamten Querschnitt)

Rohrströmung

- Geschwindigkeitsprofil

- wandnaher Bereich → viskose Unterschicht + logarithmisches Wandgesetz
- Kernströmung → voll ausgebildete Turbulenz („Pfropfenströmung“)

- Approximation: $u^+/u_{\max}^+ = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$ Prandtl & von Kármán: $n=7 \rightarrow 1/7$ -Potenzgesetz

- Rohrreibungsbeiwert:

- hydraulisch-glatt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg\left(\frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2.51}\right)$$

$$k_S^+ = \frac{k_S \cdot u_\tau}{\nu} \leq 5$$

- hydraulisch rau

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{0.27}{D/k}\right)$$

- technisch rau / vollrau

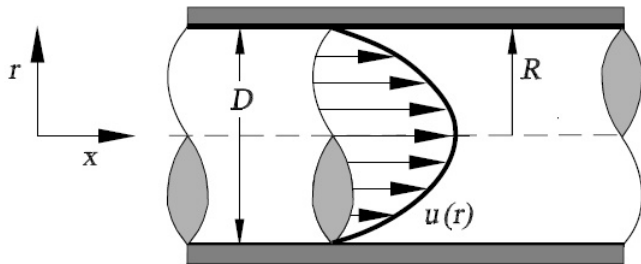
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{0.27}{D/k}\right)$$

$$k_S^+ > 70$$

→ Moody-Diagramm (1944)
und Formelsammlung (inkl. diverser Näherungslösungen)

Rohrströmung - laminar und turbulent

laminare Rohrströmung

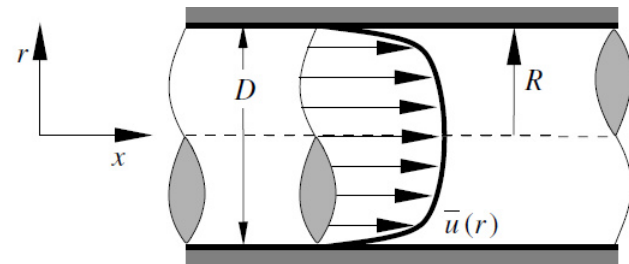


$$u(r) = u_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$u_{\text{eff}} = \frac{\dot{V}}{A_{\text{Quer}}} = \frac{1}{2} u_{\max}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

turbulente Rohrströmung



$$\bar{u}(r) = \bar{u}_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$u_{\text{eff}} = \frac{\dot{V}}{A_{\text{Quer}}} = \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)} \cdot u_{\max}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg \left(\frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2.51} \right)$$

Bildquelle: Oertel et al., *Strömungsmechanik*. Vieweg+Teubner, **2011**; Abb. 2.91+2.92