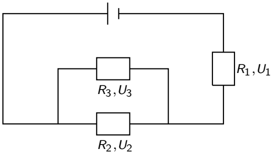
LGS vom Typ $(3,3)$

Beispiel 8.20

Berechnung elektrischer Stromstärken I_1, I_2, I_3 in Schaltung[1]



R_i	...	elek. Widerstand
U_i	...	elek. Spannung
I_i	...	elek. Stromstärke

Es gelten: $U_i = R_i \cdot I_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Aufstellen eines Systems linearer Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{llll} I_1 & - I_2 & - I_3 & = 0 \\ R_1 I_1 & + R_2 I_2 & & = U \\ & R_2 I_2 & - R_3 I_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Drei lineare Gleichungen in den Unbekannten I_1, I_2, I_3.

2. Schreibe in Matrixform $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] siehe Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd. 2, S. 5 f.

LGS vom Typ $(3, 3)$

Beispiel 8.20

3. Berechne inverse Matrix A^{-1} der Koeffizientenmatrix A

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -R_2 R_3 & -(R_2 + R_3) & R_2 \\ R_1 R_3 & -R_3 & -R_1 \\ R_1 R_2 & -R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix}$$

   mit $\lambda = -(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) = \det A$.

4. Für $\det A \neq 0$ ist dann

$$x = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = A^{-1} b = -\frac{1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \cdot \begin{pmatrix} -(R_2 + R_3) U \\ -R_3 U \\ -R_2 U \end{pmatrix}$$

   die einzige Lösung von $Ax = b$.