



Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Professur für Produktionswirtschaft und Industriebetriebslehre

Produktionsmanagement II

Skript

Prof. Dr. Florian Sahling

Stand: 21. März 2018

Chemnitz im Sommersemester 2018

Zielsetzung und Zielgruppe der Veranstaltung

Die Veranstaltung „Produktionsmanagement II“ dient der vertieften Behandlung ausgewählter produktionswirtschaftlicher Fragestellungen, die im Zusammenhang mit der Gestaltung industrieller Produktionsprozesse zu lösen sind. Sie richtet sich insbesondere an Studierende der Masterstudiengänge „Value Chain Management“ und „Wirtschaftsingenieurwesen“, die bereits die Veranstaltung „Quantitative Methoden des Operations Management“ erfolgreich besucht haben. Idealerweise haben Sie die Veranstaltung „Operations Research (OR)“ bereits besucht. Das vorliegende Skript ist in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Stefan Helber während meiner Tätigkeit am Institut für Produktionswirtschaft der Leibniz Universität Hannover entstanden. Dieses Skript deckt einen Großteil der Veranstaltung ab. Für die anderen Teile finden Sie im Skript zahlreiche Hinweise auf einschlägige Lehrbuchkapitel und weiterführende Aufsätze.

Sprechstunde:

Nach Vereinbarung über das Sekretariat

Literaturverzeichnis

- Bleymüller, J., G. Gehlert und H. Gülicher (2008). Statistik für Wirtschaftswissenschaftler (15. Aufl.). München: Vahlen.
- DeLurgio, S. A. (1998). Forecasting Principles and Applications. Boston: Irwin.
- Drexl, A. und K. Haase (1995). Proportional lotsizing and scheduling. *International Journal of Production Economics* 40, 73–87.
- Drexl, A. und A. Kimms (1997). Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research* 99, 221–235.
- Fleischmann, B. (1990). The discrete lot-sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research* 44, 337–348.
- Fleischmann, B. und H. Meyr (1997). The general lotsizing and scheduling problem. *OR Spektrum* 19, 11–21.
- Günther, H.-O. und H. Tempelmeier (2016). Produktion und Logistik (12. Aufl.). Norderstedt: Books on Demand.
- Helber, S. (1994). Kapazitätsorientierte Losgrößenplanung in PPS-Systemen. Stuttgart: M&P Verlag für Wissenschaft und Forschung.
- Helber, S. und H. Kuhn (2003). Planung von Produktionsinseln. *Wirtschaftswissenschaftliches Studium* 32, 76–82.
- Helber, S. und F. Sahling (2015). Gestaltung industrieller Produktionsprozesse, unveröffentlichtes Skript (WS 2015/16) *Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Leibniz Universität Hannover*
- Helber, S., F. Sahling und K. Schimmelpfeng (2013). Dynamic capacitated lot sizing with random demand and dynamic safety stocks. *OR Spectrum* 35, 75–105.
- Küpper, H.-U. und S. Helber (2004). Ablauforganisation in Produktion und Logistik (3. Aufl.). Stuttgart: Schäffer-Poeschel.
- Meyr, H. (1999). Simultane Losgrößen- und Reihenfolgeplanung für kontinuierliche Produktionslinien. Wiesbaden: Gabler.
- Tempelmeier, H. (2001). Master Planning mit Advanced Planning Systems. Norderstedt: Books on Demand.
- Tempelmeier, H. (2015). Bestandsmanagement in Supply Chains (4. Aufl.). Norderstedt: Books on Demand.
- Tempelmeier, H. (2016). Produktionsplanung in Supply Chains (4. Aufl.). Norderstedt: Books on Demand.

Inhaltsverzeichnis

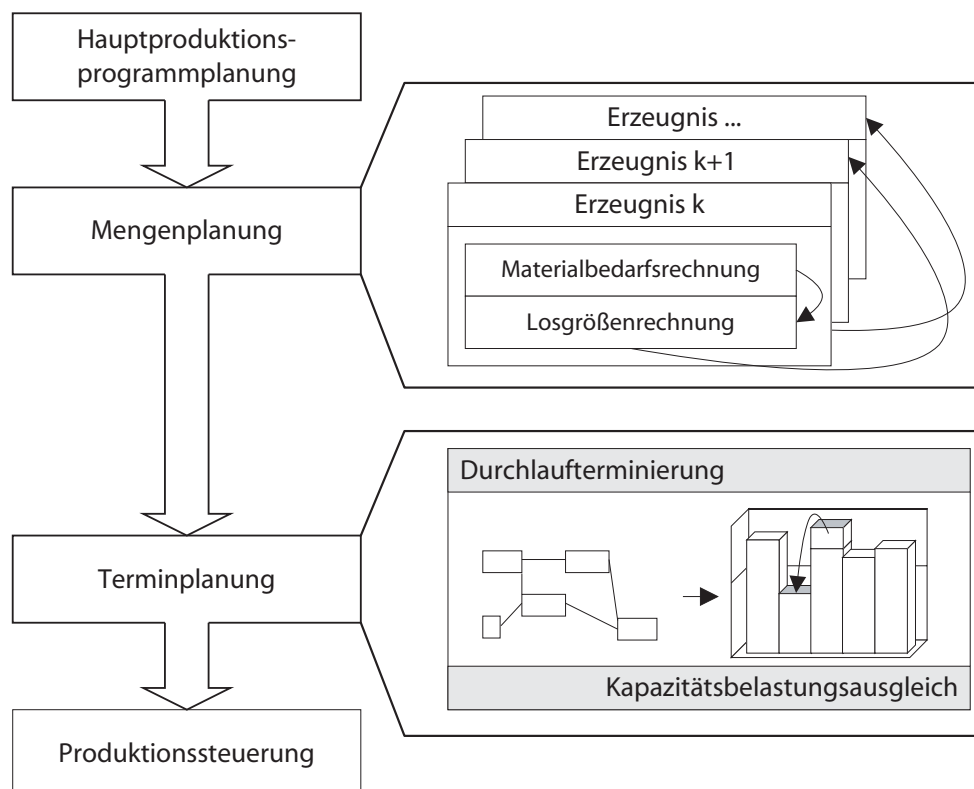
Literaturverzeichnis	ii
1 Produktionsplanungs- und -steuerungssysteme	1
1.1 Klassische Produktionsplanungs- und -steuerungssysteme	1
1.2 Die KPPS-Pyramide	2
2 Verbrauchsorientierte Verfahren der Bedarfsermittlung	3
2.1 Gegenstand und Funktion von Prognosemodellen	3
2.2 Beurteilung der Qualität eines Prognoseverfahrens	4
2.3 Bedarfsprognose bei konstantem Niveau des Bedarfs	5
2.3.1 Modell des datenerzeugenden Prozesses	5
2.3.2 Prognose mittels gleitender Durchschnitte	5
2.3.3 Prognose mittels exponentieller Glättung erster Ordnung	6
2.4 Bedarfsprognose bei trendförmigem Bedarf	8
2.4.1 Modell des datenerzeugenden Prozesses	8
2.4.2 Prognose mittels Linearer Regressionsrechnung	8
2.5 Bedarfsprognose bei saisonalem Bedarf durch Zeitreihenzerlegung	10

1 Produktionsplanungs- und -steuerungssysteme

1.1 Klassische Produktionsplanungs- und -steuerungssysteme

Literatur: Günther und Tempelmeier (2016, Kap. 16.1)

Struktur klassischer PPS-Systeme



Quelle: Günther und Tempelmeier (2016, S. 315)

Kritikpunkte an klassischen PPS-Systemen

Mehr Datenverwaltung als Planung, insbesondere

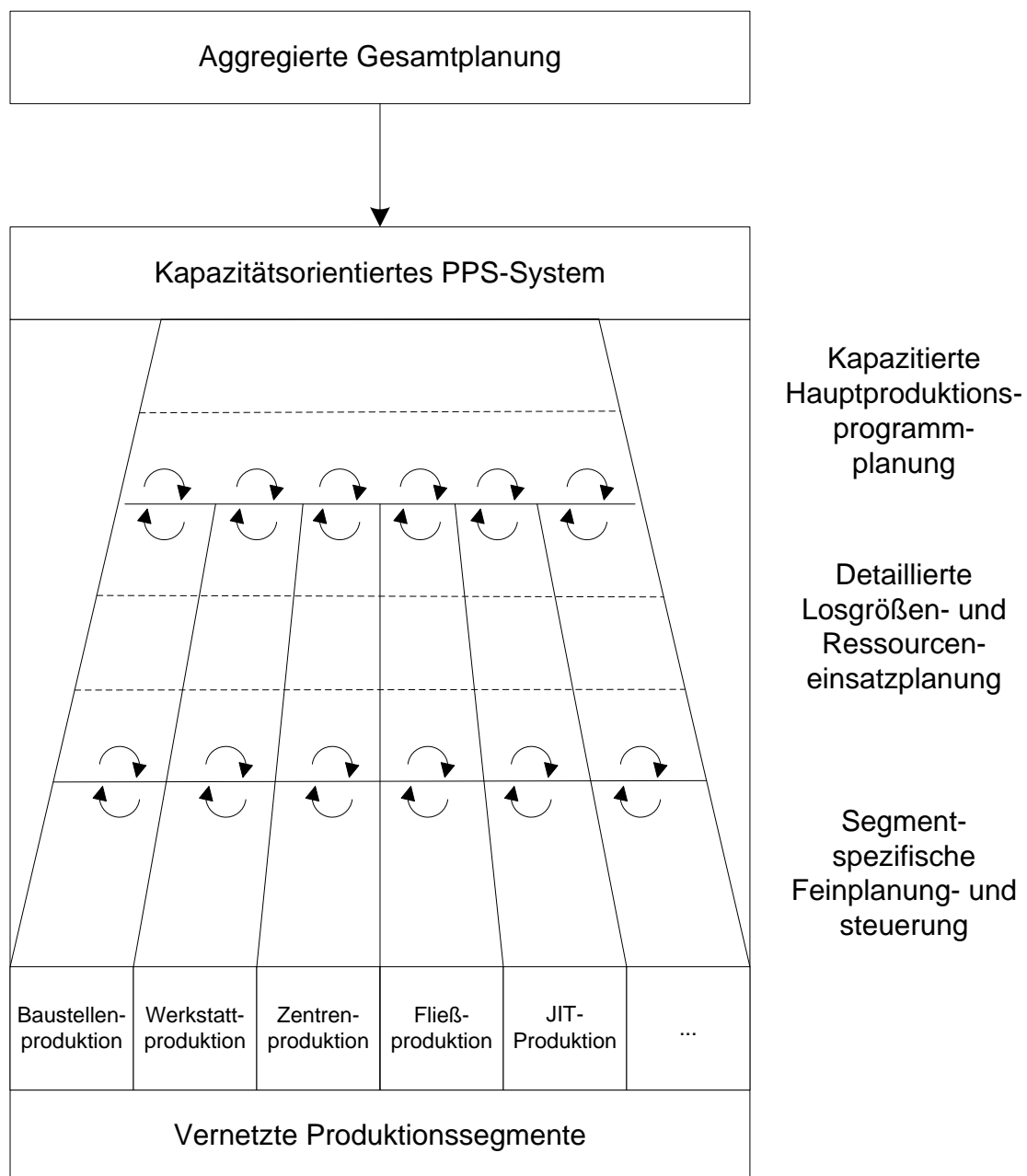
- keine kapazitätsorientierte mittelfristige Produktionsprogrammplanung
- isolierte Bestimmung der Produktionsauftragsgrößen (Losgrößen)
 - horizontale Interdependenz durch Kapazitätsrestriktionen vernachlässigt
 - vertikale Interdependenz durch Erzeugnisstruktur vernachlässigt
- Verwendung geschätzter Plan-DLZ, i.W. Wartezeiten

- keine systematische Berücksichtigung des Organisationstyps der Produktion
- systematische Vernachlässigung von Kapazitätsrestriktionen

Ergebnis: Unzuverlässige Pläne, hohe DLZn und Bestände

1.2 Die KPPS-Pyramide

Literatur: Günther und Tempelmeier (2016, Kap. 16.1)



Quelle: Günther und Tempelmeier (2016, S. 319)

2 Verbrauchsorientierte Verfahren der Bedarfsermittlung

Literatur: Tempelmeier (2015, Kap. B)

2.1 Gegenstand und Funktion von Prognosemodellen

Der Bedarf nach einem Produkt je Periode kann zum einen programmorientiert und zum anderen verbrauchsorientiert ermittelt werden.

Programmorientierte Verfahren beruhen auf der Annahme, dass bestimmte Entscheidungen im Unternehmen den Bedarf nach bestimmten Produkten bestimmen. So führt die Entscheidung im Rahmen der Produktionsprogrammplanung, bestimmte Mengen bestimmter Endprodukte in bestimmten Perioden herzustellen, zu einem abgeleiteten Bedarf nach den Komponenten, aus denen die Endprodukte bestehen. In programmorientierten Verfahren der Bedarfsprognose wird also der Bedarf aus dem Wissen über die zukünftigen Produktionsmengen und dem über die Erzeugnisstruktur abgeleitet.

Verbrauchsorientierte Verfahren beruhen dagegen auf der Basisannahme, dass der zeitliche Verlauf des Bedarfs einer eigenen Gesetzmäßigkeit folgt und dass man diese durch einen Blick in die Vergangenheit auch erkennen kann. Wenn man das Muster der Bedarfs- bzw. Verbrauchsdaten in die Zukunft fortschreibt, dann erhält man eine verbrauchsorientierte Prognose. Wer dieses Verfahren anwendet, unterstellt damit immer, dass die postulierte Gesetzmäßigkeit auch in der Zukunft Bestand hat.

In verbrauchsorientierten Verfahren der Bedarfsermittlung geht man also davon aus, dass den **beobachteten Bedarfswerten** y_1, y_2, \dots, y_t für ein Produkt eine zwar unbekannte, aber zeitlich stabile Struktur zugrunde liegt. Man versucht nun, aus den beobachteten Werten eine **ex-ante-Prognose** p_{t+1}, p_{t+2}, \dots abzuleiten. Dazu benötigt man ein *Prognosemodell*, das mit den beobachteten Bedarfswerten y_1, y_2, \dots, y_t arbeiten muss. Das Prognosemodell ermittelt dazu zunächst **ex-post-Schätzwerte** $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_t$, die dann für die Perioden $t + 1, t + 2, \dots$ fortgeschrieben werden.

Diese Vorgehensweise kann in zwei verschiedenen Bereichen zum Zuge kommen:

- Bei der Prognose des Bedarfs für Endprodukte, die für den anonymen Markt hergestellt werden.
- Bei der Prognose des Bedarfs für untergeordnete Erzeugnisse, die in viele Endprodukte eingehen. Wenn solche Produkte von geringem Wert sind und problemlos kurzfristig beschafft werden können (z. B. Schrauben), so lohnt es sich i.d.R. nicht, den Bedarf für diese Produkte durch aufwendige Rechnungen aus dem Produktionsprogramm abzuleiten.

2.2 Beurteilung der Qualität eines Prognoseverfahrens

Literatur: Tempelmeier (2015, S. 55-58)

Prognosen über künftiges Geschehen sind regelmäßig fehlerbehaftet. Der **Prognosefehler** e_t ist die Abweichung zwischen beobachtetem Wert y_t und dem Schätzwert \hat{y}_t des Prognosemodells:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad (2.1)$$

Die Prognosefehler e_t sind damit ein Ergebnis der Wahl des Prognoseverfahrens und geben Aufschluss über dessen Eignung. Sie werden dann unakzeptabel groß, wenn

- das verwendete **Prognosemodell** sachlich nicht zu dem zu prognostizierenden Sachverhalt passt (z. B. Annahme einer konstanten monatlichen Nachfrage nach Weihnachtsbäumen) oder wenn
- die Daten einen **Strukturbruch** enthalten (z. B. Nachfrage nach Brillengestellen nach einer Änderung der Zuzahlungsregelungen der gesetzlichen Krankenversicherung in Deutschland).

Generell erwartet man von einem Prognoseverfahren, dass der Mittelwert der Prognosefehler

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t e_k \quad (2.2)$$

über die n letzten Werte in der Nähe von Null liegen sollte. Wäre dies nicht der Fall, so würde das Prognoseverfahren die Nachfrage systematisch über- oder unterschätzen.

Darüber hinaus sollten die durch die Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=t-n+1}^t (e_k - \mu)^2 \quad (2.3)$$

gemessene Streuung der Prognosefehler möglichst gering sein. Man kann auch die mittlere *absolute* Abweichung

$$\overline{MAD}_t = \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t |e_k| \quad (2.4)$$

als Maß der Prognosegenauigkeit verwenden und von Prognose zu Prognose gemäß der Beziehung

$$MAD_t = \gamma |e_t| + (1 - \gamma) MAD_{t-1} \quad (2.5)$$

exponentiell geglättet fortschreiben. Setzt man nun den exponentiell geglätteten Prognosefehler

$$ERR_t = \delta e_t + (1 - \delta) ERR_{t-1} \quad (2.6)$$

in Relation zur geglätteten mittleren Abweichung MAD_t so erhält man ein **Abweichungssignal**

$$SIG_t = \frac{ERR_t}{MAD_t} \quad (2.7)$$

zwischen -1 und +1, das bei Überschreiten eines Grenzwertes (Tempelmeier nennt hier 0.5) als ein Zeichen für ein zu überprüfendes Prognoseverfahren anzusehen ist.

2.3 Bedarfsprognose bei konstantem Niveau des Bedarfs

2.3.1 Modell des datenerzeugenden Prozesses

In einem Prognosemodell für konstanten Bedarf geht man davon aus, dass die beobachtete Zeitreihe y_t als Realisation eines stochastischen Prozesses von Zufallsvariablen Y_t interpretiert werden kann und gemäß

$$Y_t = \beta_0 + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

um einen konstanten Wert β_0 herum schwankt. Der Störterm ϵ_t sei normalverteilt mit Mittelwert $E[\epsilon_t] = 0$ und Varianz $\text{Var}[\epsilon_t]$. Insbesondere wird angenommen, dass keine Korrelation zwischen den Störtermen verschiedener Perioden vorliegt, also $\text{Cov}[\epsilon_t, \epsilon_\tau] = 0$ gilt für alle $t \neq \tau$.

2.3.2 Prognose mittels gleitender Durchschnitte

Literatur: Tempelmeier (2015, S. 68-71)

Wenn man nun annimmt, dass sich die Zeitreihe tatsächlich gemäß dem Modell in Gleichung (2.8) verhält, aber nur die n beobachteten Werte y_{t-n+1}, \dots, y_t kennt, so muss man aus diesen eine Schätzfunktion

$$\hat{y}_k = b_0 \quad (2.9)$$

für das unbekannte β_0 ermitteln und aus dieser gemäß

$$p_{t+1} = b_0 \quad (2.10)$$

eine Prognose des Bedarfs in der kommenden Periode $t + 1$ errechnen.

Man strebt an, die Schätzfunktion y_k , hier also den Schätzer b_0 für das unbekannte β_0 , so zu ermitteln, dass ein Maß des Fehlers, die Summe der quadrierten Abweichungen

$$\begin{aligned} SQA &= \sum_{k=t-n+1}^t e_k^2 \\ &= \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - \hat{y}_k)^2 \\ &= \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - b_0)^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

minimiert werden. Dazu bildet man die erste Ableitung und setzt diese gleich Null:

$$\frac{dSQA(b_0)}{db_0} = -2 \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - b_0) = 0 \quad (2.12)$$

Löst man diese Bedingung nun nach b_0 auf, so erhält man mit $b_{0,t}$ den in Periode t geschätzten gleitenden Durchschnitt über n Perioden:

$$b_{0,t} = \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t y_k \quad (2.13)$$

Dieser Wert entspricht bei diesem Modell der Prognose für die künftigen Periodenbedarfe, d.h.

$$p_{t+1} = b_{0,t} \quad (2.14)$$

Problematisch an diesem Verfahren ist nun, dass

- für die Berechnung immer die n letzten Bedarfswerte gespeichert werden müssen und dass
- alle n Bedarfswerte gleich stark gewichtet werden.

Diese Nachteile vermeiden die Verfahren der exponentiellen Glättung.

2.3.3 Prognose mittels exponentieller Glättung erster Ordnung

Literatur: Tempelmeier (2015, S. 71-78)

Die Idee dieses Verfahrens besteht darin, den aktuelleren Prognosefehlern einen stärkeren Einfluss auf die Prognose zu geben als den weiter zurückliegenden. Man erreicht das dadurch, dass eine *gewichtete* ("weighted") Summe der quadrierten Abweichungen

$$WSQA = \sum_{k=t-n+1}^t w_k (y_k - b_0)^2 \quad (2.15)$$

minimiert wird. Man kann dies z. B. erreichen, indem man das Gewicht gemäß

$$w_k = \alpha (1 - \alpha)^{t-k} \quad (2.16)$$

berechnet für $0 < \alpha < 1$. Je größer α gewählt wird, desto stärker ist das Gewicht der aktuellen Beobachtungen.

Benutzt man dieses Gewichtungsschema und stellt man sich vereinfachend vor, dass unendliche viele "alte" Beobachtungswerte vorliegen, so kann man die folgende Funktion

$$WSQA = \sum_{k=-\infty}^t \alpha (1 - \alpha)^{t-k} (y_k - b_0)^2 \quad (2.17)$$

minimieren, indem man wieder die erste Ableitung nach b_0 ermittelt und gleich Null setzt:

$$\frac{dWSQA(b_0)}{db_0} = -2 \sum_{k=-\infty}^t \alpha (1 - \alpha)^{t-k} (y_k - b_0) = 0 \quad (2.18)$$

Daraus erhält man unmittelbar die folgende Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^t \alpha (1 - \alpha)^{t-k} y_k = b_{0,t} \sum_{k=-\infty}^t \alpha (1 - \alpha)^{t-k} \quad (2.19)$$

sowie analog für $t - 1$ die Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{t-1} \alpha (1 - \alpha)^{t-k-1} y_k = b_{0,t-1} \sum_{k=-\infty}^{t-1} \alpha (1 - \alpha)^{t-k-1}. \quad (2.20)$$

Zieht man nun von Gleichung (2.19) die mit $(1 - \alpha)$ multiplizierte Gleichung (2.20) ab, so erhält man mit der Beziehung $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ für die *geometrische Reihe* folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} \alpha y_t &= (b_{0,t} - b_{0,t-1}) \alpha (1 - \alpha) \sum_{k=-\infty}^{t-1} (1 - \alpha)^{t-k-1} + \alpha b_{0,t} \\ &= (b_{0,t} - b_{0,t-1}) \alpha (1 - \alpha) \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} (1 - \alpha)^{\bar{k}} + \alpha b_{0,t} \\ &= (b_{0,t} - b_{0,t-1}) \alpha (1 - \alpha) \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} + \alpha b_{0,t} \\ &= b_{0,t} - b_{0,t-1} + \alpha b_{0,t-1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Schreibt man diese in folgender Form

$$b_{0,t} = \alpha y_t + (1 - \alpha) b_{0,t-1}, \quad (2.22)$$

so erkennt man, dass sich die aktuelle Prognose $b_{0,t}$ zusammensetzt als gewichtetes Mittel des aktuellen Beobachtungswertes y_t und der letzten Prognose $b_{0,t-1}$.

Die Bedeutung des Parameters α kann man gut nachvollziehen, wenn man einmalige “Sprünge” in die Bedarfszeitreihe hineinlegt, wie in dem folgenden Beispiel:

Beispiel: Sprung von 100 auf 120, $\alpha = 0.1$ bzw. $\alpha = 0.5$

t	y_t	Prognose	Fehler	t	y_t	Prognose	Fehler
1	100	-	-	1	100	-	-
2	100	100.00	0.00	2	100	100.00	0.00
3	100	100.00	0.00	3	100	100.00	0.00
4	120	100.00	20.00	4	120	100.00	20.00
5	120	102.00	18.00	5	120	110.00	10.00
6	120	103.80	16.20	6	120	115.00	5.00
7	120	105.42	14.58	7	120	117.50	2.50
8	120	106.88	13.12	8	120	118.75	1.25
9	120	108.19	11.81	9	120	119.38	0.63
10	120	109.37	10.63	10	120	119.69	0.31
11	120	110.43	9.57	11	120	119.84	0.16
12	120	111.39	8.61	12	120	119.92	0.08
13	120	112.25	7.75	13	120	119.96	0.04
14	120	113.03	6.97	14	120	119.98	0.02
15	-	113.72	-	15	-	119.99	-

2.4 Bedarfsprognose bei trendförmigem Bedarf

Literatur: Tempelmeier (2015, S. 78-83)

2.4.1 Modell des datenerzeugenden Prozesses

In einem Prognosemodell für trendförmigen Bedarf geht man davon aus, dass die Zeitreihe y_t die Realisation des stochastischen Prozesses Y_t ist und gemäß

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \epsilon_t \quad (2.23)$$

um einen kontinuierlich ansteigenden Wert $\beta_0 + \beta_1 \cdot t$ herum schwankt. Der Störterm ϵ_t sei wieder normalverteilt mit Mittelwert $E[\epsilon_t] = 0$ und Varianz $\text{Var}[\epsilon_t]$ und es sei angenommen, dass keine Korrelation zwischen den Störtermen verschiedener Perioden vorliegt, also $\text{Cov}[\epsilon_t, \epsilon_\tau] = 0$ gilt für alle $t \neq \tau$.

2.4.2 Prognose mittels Linearer Regressionsrechnung

Literatur: Tempelmeier (2015, S. 78-83)

Hinweis: Eine hervorragende Einführung in die Lineare Regressionsrechnung finden Sie in Bley Müller et al. (2008).

Wenn man annimmt, dass sich die Zeitreihe tatsächlich gemäß dem Modell in Gleichung (2.23) verhält, aber wieder nur die n beobachteten Werte y_{t-n+1}, \dots, y_t kennt, so muss man aus diesen eine Schätzfunktion

$$\hat{y}_k = b_0 + b_1 \cdot k \quad (2.24)$$

für den unbekanntem Achsenabschnitt β_0 und die Steigung β_1 ermitteln und aus dieser gemäß

$$p_{t+j} = b_0 + b_1 \cdot (t + j) \quad (2.25)$$

eine Prognose des Bedarfs in der kommenden Periode $t + j$ errechnen.

Man strebt wieder an, die Schätzfunktion y_k , also hier die beiden Schätzer b_0 und b_1 für die unbekanntem β_0 und β_k , so zu ermitteln, dass die Summe der quadrierten Abweichungen

$$\begin{aligned} SQA(b_0, b_1) &= \sum_{k=t-n+1}^t e_k^2 \\ &= \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - \hat{y}_k)^2 \\ &= \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - b_0 - b_1 \cdot k)^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

minimiert wird. Dazu bildet man die ersten partiellen Ableitungen und setzt diese gleich Null:

$$\frac{\partial SQA(b_0, b_1)}{\partial b_0} = -2 \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - b_0 - b_1 \cdot k) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial SQA(b_0, b_1)}{\partial b_1} = -2 \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - b_0 - b_1 \cdot k) \cdot k = 0 \quad (2.28)$$

Löst man diese Bedingungen nun nach b_0 und b_1 auf, so erhält man die folgenden Schätzwerte:

$$b_{0,t} = \frac{\sum_{k=t-n+1}^t k^2 \cdot \sum_{k=t-n+1}^t y_k - \sum_{k=t-n+1}^t k \cdot \sum_{k=t-n+1}^t k \cdot y_k}{n \cdot \sum_{k=t-n+1}^t k^2 - \left(\sum_{k=t-n+1}^t k\right)^2} \quad (2.29)$$

$$b_{1,t} = \frac{n \cdot \sum_{k=t-n+1}^t k \cdot y_k - \sum_{k=t-n+1}^t k \cdot \sum_{k=t-n+1}^t y_k}{n \cdot \sum_{k=t-n+1}^t k^2 - \left(\sum_{k=t-n+1}^t k\right)^2} \quad (2.30)$$

Grundsätzlich treten bei diesem Verfahren wieder die gleichen Probleme auf wie bei den gleitenden Durchschnitten in Abschnitt 2.3.2.

Man möchte häufig wissen, wie stark die Änderungen der abhängigen Variablen y_k auf die unterschiedlichen Ausprägungen der unabhängigen (und damit "erklärenden") Variablen zurückgeführt werden kann, und wie stark der so nicht erfasste Zufallseinfluss ist. Die erklärende Variable ist hier die Zeit, dargestellt durch den Periodenindex k . Im Fall der linearen Regressionsrechnung ist nun die Frage nach dem "Maß der Erklärung" besonders leicht zu beantworten. Dazu berechnet man zunächst den mittleren Bedarf

$$\mu_t = \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t y_k \quad (2.31)$$

und die **Gesamtabweichungsquadratsumme**

$$SQT = \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - \mu_t)^2, \quad (2.32)$$

die Summe der quadrierten erklärten Abweichungen¹

$$SQE = \sum_{k=t-n+1}^t (\hat{y}_k - \mu_t)^2 \quad (2.33)$$

und die Summe der quadrierten Residuen $e_k = y_k - \hat{y}_k$:

$$SQR = \sum_{k=t-n+1}^t (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (2.34)$$

Im Fall der Linearen Kleinste-Quadrate-Regression gilt nun:

$$SQT = SQE + SQR \quad (2.35)$$

Die Summe der quadrierten Abweichungen kann also additiv zerlegt werden.

Aus diesen Größen kann nun das **lineare einfache Bestimmtheitsmaß**

$$r^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum_{k=t-n+1}^t (\hat{y}_k - \mu_t)^2}{\sum_{k=t-n+1}^t (y_k - \mu_t)^2} \quad (2.36)$$

bestimmt werden, das Werte im Bereich $0 \leq r^2 \leq 1$ annimmt. Werden die Abweichungen vollständig durch den Einfluss der unabhängigen Variablen erklärt, so ist $r^2 = 1$, liefert diese dagegen keinerlei Erklärungsbeitrag, so ist $r^2 = 0$.

Auch für den Fall eines trendförmig verlaufenden Bedarfs kann man mit einem speziellen Verfahren der exponentiellen Glättung arbeiten, der sogenannten Exponentiellen Glättung zweiter Ordnung (vgl. (Tempelmeier, 2015, S. 87-97)). Deren Darstellung würde hier jedoch zu weit führen.

2.5 Bedarfsprognose bei saisonalem Bedarf durch Zeitreihenzerlegung

Literatur: Tempelmeier (2015, S. 98-106)

Hinweis: Für ein vertiefendes Studium empfiehlt sich DeLurgio (1998).

Häufig sind Zeitreihen durch saisonale Schwankungen gekennzeichnet. So tritt vor allem im Herbst und Winter eine erhöhte Nachfrage nach Schokoladenweihnachtsmännern auf. Will man den Bedarf für derartige Güter prognostizieren, so muss man diese saisonalen Einflüsse

¹**Hinweis:** Tempelmeier (2015) verwendet die Bezeichnungen SQE und SQR genau entgegengesetzt, hier wird der Darstellung in Bleytmüller et al. (2008) gefolgt.

berücksichtigen. Aus der Vielzahl der z.T. recht anspruchsvollen Verfahren zur Zeitreihenanalyse wird hier nur ein sehr einfaches Verfahren zur *Zeitreihenzerlegung* vorgestellt.

Man geht davon aus, dass die Zeitreihe bestimmt ist durch

- einen langfristigen **Trend** T ,
- einen **langfristigen Zyklus** C , dessen Zyklusdauer deutlich über der einer Saison liegt,
- einem **Saison-Zyklus** S , der sich jährlich in gleicher Weise auswirkt und
- einer **zufälligen (irregulären) Komponente** I .

Wenn man nun den Eindruck hat, dass die saisonalen und die zufälligen Schwankungen im Zeitablauf tendenziell gleich stark sind, so empfiehlt sich eine Prognose mit dem folgenden *additiven* Modell:

$$Y = T + C + S + I \quad (2.37)$$

Hat man dagegen den Eindruck, dass sowohl das mittlere Niveau als auch das Ausmaß der Schwankungen im Zeitablauf zunehmen, so empfiehlt sich das folgende *multiplikative* Prognosemodell:

$$Y = T \cdot C \cdot S \cdot I \quad (2.38)$$

Für das multiplikative Modell in Gleichung (2.38) wird die Zerlegung im Folgenden kurz beschrieben und am Beispiel verdeutlicht. Dabei wird das Produkt $T \cdot C$ gemeinsam als *eine* "glatte" Komponente behandelt, für die später eine Trendgerade zu schätzen ist. Das Ziel besteht also darin, für die gegebenen Beobachtungswerte y_k eine Schätzfunktion

$$\hat{y}_k = (b_0 + b_1 \cdot k) \cdot s_k \quad (2.39)$$

mit dem Achsenabschnitt b_0 , der Steigung b_1 und den Saisonfaktoren s_k zu ermitteln. Dabei geht man davon aus, dass die Saisonfaktoren zyklisch wiederkehren, also bei einer Prognose auf Monatsbasis

$$s_1 = s_{13} = s_{25} = \dots \quad (2.40)$$

und bei einer Prognose auf Quartalsbasis

$$s_1 = s_5 = s_9 = \dots \quad (2.41)$$

gilt. Zunächst bestimmt man die Saisonfaktoren s_k , dann eine Geradengleichung $b_0 + b_1 \cdot k$ für die glatte Komponente TC , und anschließend prognostiziert man die künftigen Werte gemäß Gleichung (2.39).

Das Verfahren wird an einem **Beispiel** demonstriert, in dem die Zeitreihe erzeugt wurde durch eine Geradengleichung $100 + 10 \cdot k$, die dann multiplikativ durch Saisonfaktoren $s_1 = 0.5, s_2 = 1.2, s_3 = 1.7$ und $s_4 = 0.6$ sowie eine durch eine irreguläre Komponente I verzerrt wurde:

k	$100 + 10 \cdot k$	$(100 + 10 \cdot k) \cdot s_k$	I	$y_k = (100 + 10 \cdot k) \cdot s_k \cdot I$
1	110	55	1.07044	58.87
2	120	144	0.98048	141.19
3	130	221	1.05398	232.93
4	140	84	0.93801	78.79
5	150	75	1.04322	78.24
6	160	192	0.90364	173.50
7	170	289	0.96845	279.88
8	180	108	1.06009	114.49
9	190	95	0.91860	87.27
10	200	240	1.05040	252.10
11	210	357	0.95559	341.15
12	220	132	0.95913	126.61
13	230	115	0.99226	114.11
14	240	288	0.94792	273.00
15	250	425	1.08502	461.13
16	260	156	1.05265	164.21

Bestimmung der Saisonfaktoren: Zunächst berechnet man einen zentrierten gleitenden Durchschnitt, dessen Gliederzahl der Anzahl Perioden in einem Saisonzyklus entspricht, hier also 4. Durch diesen zentrierten gleitenden Durchschnitt wird zunächst die glatte Komponente $T \cdot C$ ermittelt:

$$\begin{aligned}
 tc_3 &= \frac{0.5 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 0.5y_5}{4} \\
 &= \frac{0.5 \cdot 58.9 + 141.2 + 232.9 + 78.8 + 0.5 \cdot 78.2}{4} = 130.4 \\
 tc_4 &= \frac{0.5 \cdot y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 0.5y_6}{4} \\
 &= \frac{0.5 \cdot 141.2 + 232.9 + 78.8 + 78.2 + 0.5 \cdot 173.5}{4} = 136.8 \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

(Bei der Berechnung von tc_3 erhalten die Beobachtungen y_1 und y_5 jeweils das Gewicht 0.5, um einen viergliedrigen Zyklus auf die Periode 3 zentrieren zu können.) Man erhält die folgende Tabelle:

k	y_k	zentr. gl. Durchschn. tc_k	$si_k = \frac{y_k}{tc_k}$
1	58.87		
2	141.19		
3	232.93	130.37	1.79
4	78.79	136.83	0.58
5	78.24	146.74	0.53
6	173.50	157.07	1.10
7	279.88	162.66	1.72
8	114.49	173.61	0.66
9	87.27	191.09	0.46
10	252.10	200.27	1.26
11	341.15	205.14	1.66
12	126.61	211.10	0.60
13	114.11	228.71	0.50
14	273.00	248.41	1.10
15	461.13		
16	164.21		

In der letzten Spalte der Tabelle dividiert man nun die beobachteten Werte durch den korrespondierenden zentrierten gleitenden Durchschnitt und erhält so gemäß

$$\frac{Y}{T \cdot C} = \frac{T \cdot C \cdot S \cdot I}{T \cdot C} = S \cdot I \quad (2.43)$$

einen Ausdruck für die saisonale und irreguläre Komponente $S \cdot I$. Aus $S \cdot I$ ist nun durch Mittelwertbildung über die jeweils zusammengehörigen Saisonfaktoren der irreguläre Einfluss auszuschalten:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_3 &= \frac{si_3 + si_7 + si_{11}}{3} = \frac{1.7867 + 1.7207 + 1.6630}{3} = 1.723 \\ \tilde{s}_4 &= \dots = 0.612 \\ \tilde{s}_1 &= \dots = 0.496 \\ \tilde{s}_2 &= \dots = 1.154 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Diese "Rohwerte" der Saisonfaktoren addieren sich nicht zu 4, aber über $\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 + \tilde{s}_3 + \tilde{s}_4 = 3.986$ erhält man mit

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{4}{3.986} \tilde{s}_1 = 0.49806609 \\ s_2 &= \frac{4}{3.986} \tilde{s}_2 = 1.15831571 \\ s_3 &= \frac{4}{3.986} \tilde{s}_3 = 1.72971858 \\ s_4 &= \frac{4}{3.986} \tilde{s}_4 = 0.61389962 \end{aligned} \quad (2.45)$$

die geschätzten Saisonfaktoren. Dividiert man nun die Zeitreihe $Y = T \cdot C \cdot S \cdot I$ durch die so gewonnenen Saisonfaktoren, so erhält man die saisonal bereinigte Zeitreihe

$$\frac{Y}{S} = T \cdot C \cdot I \quad (2.46)$$

gemäß der zweiten Spalte der folgenden Tabelle. Führt man für die Zeitreihe TCI nun eine lineare Regression durch, so erhält man die Regressionsfunktion $TC = (98.64 + 10.11 \cdot k)$, die in der dritten Spalte der Tabelle ausgewertet ist.

k	TCI	$TC = (98.64 + 10.11 \cdot k)$
1	118.2	108.8
2	121.9	118.9
3	134.7	129.0
4	128.3	139.1
5	157.1	149.2
6	149.8	159.3
7	161.8	169.4
8	186.5	179.5
9	175.2	189.6
10	217.6	199.8
11	197.2	209.9
12	206.2	220.0
13	229.1	230.1
14	235.7	240.2
15	266.6	250.3
16	267.5	260.4

Nun multipliziert man die geschätzten Werte für die glatte Komponente mit den zuvor ermittelten Saisonfaktoren und kann so eine ex-post-Prognose errechnen:

k	y_k	$\hat{y}_k = (98.64 + 10.11 \cdot k) \cdot s_k$	Fehler $y_k - \hat{y}_k$
1	58.87	54.17	4.71
2	141.19	137.69	3.50
3	232.93	223.10	9.83
4	78.79	85.39	-6.59
5	78.24	74.31	3.93
6	173.50	184.54	-11.04
7	279.88	293.06	-13.18
8	114.49	110.22	4.27
9	87.27	94.46	-7.19
10	252.10	231.39	20.71
11	341.15	363.02	-21.87
12	126.61	135.05	-8.44
13	114.11	114.60	-0.49
14	273.00	278.24	-5.23
15	461.13	432.98	28.15
16	164.21	159.88	4.34

Will man nun eine ex-ante-Prognose etwa für die Periode 17 vornehmen, so ergibt sich diese zu $\hat{p}_{17} = (98.64 + 10.11 \cdot 17) \cdot s_1 = 134.7$.