Übungsblatt 28

Aufgabe 1. Berechnen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 2x_1 & & & & & - & 4x_4 & + & 3x_5 & - & x_6 & = & 10 \\ & - & 2x_2 & & & + & 2x_4 & - & 4x_5 & & & = & 4 \\ & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & + & 4x_6 & = & 7 \end{array} \tag{1}$$

(a) die allgemeine Lösung

(b) die spezielle Lösung mit $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$

(c) die spezielle Lösung mit $x_4 = x_6 = 0$, $x_5 = 1$

(d) die spezielle Lösung mit $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$.

Aufgabe 2. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ -2x & + & y & - & 5z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & \mu \end{array} \tag{2}$$

in den Variablen x, y und z, dessen Lösbarkeit von den reellen Parametern λ und μ abhängt.

(a) Entscheiden Sie mithilfe eines geeigneten Verfahrens, für welche Parameterwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem in Formelnummer (2)

  (i) genau eine Lösung (d. h. (2) ist eindeutig lösbar)

  (ii) unendlich viele Lösungen

  (iii) keine Lösung (d. h. (2) ist nicht lösbar)

  besitzt.

(b) Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems (2) für den Fall (aii).

Aufgabe 3. Berechnen Sie unter Verwendung des Eliminationsverfahrens nach Gauss die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme $A\,x = b$, wobei

(a) $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ (b) $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & 1 & 2 & 9 & 23 \\ 2 & 1 & -2 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 9 & 27 \end{array}\right)$

die erweiterten Koeffizientenmatrizen sind.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Lösungen z_1 und z_2 des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (2 - \mathrm{i}) \cdot z_1 \quad &+ (3 + \mathrm{i}) \cdot z_2 &= 4\mathrm{i} \\ z_1 \quad &- (8 - \mathrm{i}) \cdot z_2 &= 2 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Vertiefung

Aufgabe 5. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

in den Variablen x_1 und x_2.

(a) Weisen Sie analytisch und graphisch nach, dass das lineare Gleichungssystem (3) keine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\left(A^\top \cdot A\right) \cdot x = \left(A^\top \cdot b\right) \tag{4}$$

eine eindeutige Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

Stellen Sie die Lösung in Abhängigkeit der Matrizen A und b dar.

(c) Weisen Sie nach, dass für n-reihige Matrizen A ($n \geq 2$) mit $\det A \neq 0$ gilt:

$$A^{-1} = \left(A^\top \cdot A\right)^{-1} \cdot A^\top$$

(d) Kennzeichnen Sie die Lösung von (4) in Bezug auf das lineare Gleichungssystem in (3) graphisch.