

Probeklausur  
Mathematik 2. Semester (Imm.-Jg. 2016 und jünger)  
Modulnummer: M-04

---

Name: .....

Vorname: .....

Matr.-Nr.: .....

---

**Allgemeine Hinweise:**

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 150 Minuten.
- Die mit \* / *Zusatz* gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben (zusätzliche Punkte möglich).
- Nutzen Sie ausschließlich DIN A4 Blätter. Alle Blätter sind mit Ihrem *Namen* und *Matrikelnummer* zu versehen.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Lösungswege aller Aufgaben sind *vollständig und nachvollziehbar* anzugeben.
- Kreuzen Sie auf der unten angegebenen Tabelle an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
- Zur Abgabe legen Sie Ihre Lösungen in dieses gefaltete Blatt hinein.

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- schriftliche Unterlagen wie Mitschriften aus der Vorlesung, Übungsblätter, Merkblätter sowie Bücher
- Maxima bzw. beliebige Taschenrechner (z.B. WTR, CAS, GTR)

**Nicht erlaubte Hilfsmittel:**

- jede Art Hilfsmittel, welche Kommunikation nach außen ermöglichen
- 

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
Bearbeitet									
Mögliche Punkte	15	13	9	7	11	9	4	4	64+8
Erreichte Punkte									

**Note:** .....

.....  
(Unterschrift des Prüfers)

**Aufgabe 1.** Gegeben sei der dreidimensionale Bereich  $B \subset \mathbb{R}^3$  durch

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{und} \quad x + 2y + 4z \leq 1 \quad (1)$$

- (a) Skizzieren Sie  $B$  in Formelzeile (1) als Punktmenge bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems.
- (b) Fassen Sie  $B$  auf verschiedene Weise als Normalbereich in kartesischen Koordinaten auf. Ergänzen Sie hierfür in den nachfolgend aufgeführten Integralen  $\int_B f \, dV$  (Integrandfunktion  $f$ , Volumendifferential  $dV$ ) die Grenzen.

$$\begin{aligned} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dx \, dy \, dz &= \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dx \, dz \, dy = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dy \, dx \, dz = \\ \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dy \, dz \, dx &= \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dz \, dx \, dy = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f \, dz \, dy \, dx \end{aligned}$$

- (c) Berechnen Sie unter Benutzung der Rechenregeln für bestimmte Integrale (schriftlich!) das Dreifachintegral

$$\int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x=0}^{1-2y} \int_{z=0}^{\frac{1}{4}-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}} 24xy^2 \, dz \, dx \, dy$$

**Aufgabe 2.** Gegeben ist die Funktion  $f$  zweier reeller Veränderlicher  $x$  und  $y$  mithilfe

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = 3 - x - y$$

und Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

- (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion

$$(x, y, \lambda) \mapsto L(x, y, \lambda) \quad (2)$$

zur Bestimmung der Extremwerte von  $f$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 4$  auf. Die in Formel (2) auftretende Veränderliche  $\lambda$  bezeichnet den Lagrangeschen Multiplikator.

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Lagrangefunktion (2) alle stationären Stellen (mögliche Extremstellen) von  $f$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 4$ .
- (c) Berechnen Sie die Funktionswerte  $z = f(x, y)$  an jeder der in Aufgabenteil (b) ermittelten möglichen Extremstellen.

**Aufgabe 3.** Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 11 \\ x + 4y - 3z &= -16 \\ 3x + y - 2z &= \lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

- (a) Berechnen Sie alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für die das Gleichungssystem (3) eine Lösung besitzt.
- (b) Berechnen Sie für einen Wert  $\lambda$  aus Aufgabenteil (a) die allgemeine Lösung von (3).

**Aufgabe 4.** Gegeben sind die Funktionen  $f_i : x \mapsto y = f_i(x)$  mit

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sin(x - x_0).$$

wobei  $x \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig aber fest gewählt ist (d. h.  $x_0$  ist reelle Zahl).

(a) Stellen Sie  $f_3$  als Linearkombination von  $f_1$  und  $f_2$  dar.

(b) Bilden Sie eine Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \lambda_3 \cdot f_3(x), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

die für alle  $x \in \mathbb{R}$  den Nullvektor ergibt, ohne dass alle  $\lambda_i$  Null sind.

**Aufgabe 5.** Gegeben sind die zu unterscheidenden Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$ .

(a) Berechnen Sie mit Hilfe eines schriftlichen Verfahrens nachstehende Determinante in

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

worin  $x$  und  $y$  die kartesischen Koordinaten eines veränderlichen Punktes  $Q$  bezeichnen.

(b) Begründen Sie, dass durch die Gleichung (4) die Verbindungsgerade  $g$  der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  beschrieben ist.

(c) Berechnen Sie schriftlich die Determinante in

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (5)$$

Stellen Sie die Menge aller Punkte  $Q(x, y)$ , welche die Gleichung (5) erfüllen, in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch dar.

*Hinweis:* Nutzen Sie zur Berechnung Regeln zur Umformung von Determinanten.

**Aufgabe 6.** Gegeben sind die Drehmatrizen

$$D_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad D_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkeln  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ . Von der durch das Matrizenprodukt

$$D(\varphi, \psi) = D_1(\varphi) \cdot D_2(\psi)$$

mit  $D = (d_{jk})_{j,k=1,\dots,3}$  beschriebenen resultierenden Drehmatrix sind bekannt

$$d_{13} = -\frac{1}{2}, \quad d_{22} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad d_{23} > 0 \quad \text{und} \quad d_{33} > 0 \quad (6)$$

Berechnen Sie aus (6) die Drehwinkel  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  und geben Sie das Matrizenprodukt  $D(\varphi_0, \psi_0)$  an.

---

### Zusatz

**Aufgabe 7.** Gegeben ist die reelle Funktion  $f : [-5\pi, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x + 5\right)$$

Berechnen Sie die Menge aller Nullstellen von  $f$ .

**Aufgabe 8.** Gegeben ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y = f(x) = 4e^{-4x} - \frac{1}{2}x + 4$$

Berechnen Sie  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$  so, dass die Gleichung

$$y'' + a \cdot y' + b = 0$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt wird. Hierbei bezeichnen  $y'' = f''(x)$  und  $y' = f'(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  die erste bzw. zweite Ableitung von  $f$  nach  $x$ .