

## Übungsblatt 22

---

**Aufgabe 1.** Das Trägheitsmoment  $J$  eines Körpers  $K$  der Masse  $m$  mit Drehachse  $d$  durch den Koordinatenursprung  $O$  berechnet sich mittels

$$J = \iiint_K \rho^2 \, dm \quad (1)$$

worin  $(x, y, z) \mapsto \rho = f(x, y, z)$  den Abstand eines Punktes  $P(x, y, z)$  von  $d$  beschreibt.

Ist das Trägheitsmoment  $J_s$  für eine zu  $d$  Achse parallele Achse durch den Schwerpunkt  $S(x_s, y_s, z_s)$  von  $K$  bekannt, so kann mit Hilfe des Satzes von Steiner das Trägheitsmoment für die Drehachse  $d$  berechnet werden. Die Formel lautet

$$J = J_s + m \cdot d^2 \quad (2)$$

worin  $d = f(x_s, y_s, z_s)$ .

Berechnen Sie unter Benutzung der Formeln (1) und (2) das Trägheitsmoment eines Drehzylinders der Masse  $m$  und konstanten Massendichte  $\sigma$  mit Radius  $R$  und Höhe  $h$  bezüglich einer Mantellinie  $d$  als Drehachse.

**Aufgabe 2.** Aus der Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho$$

mit elektrischer Feldstärke  $\vec{E}$ , Ladungsdichte  $\rho$  und Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  ergibt sich

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{E} \, db = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_B \rho \, db = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q \quad (3)$$

mit der Gesamtladung  $Q$  im räumlichen Bereich  $B$ .

Für eine homogen geladene ( $\rho = \text{const}$ ) Kugel vom Radius  $R$  ist  $\vec{E}$  kugelsymmetrisch und hat die Gestalt

$$\vec{E}(r, \varphi, \theta) = E(r) \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit Skalarfunktion  $r \mapsto E(r)$ ,  $r > 0$ . Die Divergenz  $\operatorname{div} \vec{E}$  ergibt sich in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{E}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot E(r)) \quad (4)$$

Berechnen Sie mithilfe der Formeln (3) und (4) die Funktion  $r \mapsto E(r)$  der homogen geladenen Kugel mit Gesamtladung  $Q$ .

**Aufgabe 3.** Wir betrachten den Bereich  $B$  und die Funktion  $f$  gegeben durch

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x^2 - 4x + 3\} \quad \text{und} \quad f : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{2-x}{y+1}.$$

(a) Skizzieren Sie den Bereich  $B$  in einem Koordinatensystem.

- (b) Berechnen Sie die  $y$ -Koordinate des geometrischen Schwerpunkts  $(x_S, y_S)$  von  $B$ .
- (c) Berechnen Sie das Volumen der Funktion  $f$  über dem Bereich  $B$ . Nutzen Sie dazu die Substitutionsregel.

**Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 18 vorzurechnen.**

**Aufgabe 4.** Es sind die Vektoren  $a \in \mathbb{R}^4$  und  $b \in \mathbb{R}^4$  gegeben mit

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Summe  $2 \cdot (a - b) + 3 \cdot (a + b)$ .

---

### Vertiefung

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt des Kreiskegels  $z^2 = x^2 + y^2$ , wobei  $0 \leq z \leq h$ .