Übungsblatt 27

Aufgabe 1.

(a) Berechnen Sie mithilfe eines schriftlichen Verfahrens die Determinanten von

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Diskutieren Sie den Einfluß der auftretenden Parameter $c_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ bzw. von $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ auf den Wert der Determinante.

(b) Berechnen Sie unter Anwendung von Äquivalenzumformungen für Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} (\sin\varphi_1 \neq 0).$$

Aufgabe 2. Zwei Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x \mapsto y = f_i(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2\}$$

werden als Basislösungen bezeichnet, wenn

$$W(f_1, f_2) := \det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

d. h. von Null verschieden ist. $W(f_1, f_2)$ heißt Wronski-Determinante.

Untersuchen Sie, ob in den folgenden Beispielen eine Basis vorliegt.

(a) $f_1(x) = \sin(\omega x)$, $f_2(x) = \cos(\omega x)$, $f'' + \omega^2 f = 0$ (Schwingungsgleichung)

(b) $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = e^{-4x}$, $f'' + 2f' - 8f = 0$

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige zweireihige Matrizen A gilt: $\det A = \det A^\top$.

(b) Weisen Sie unter Benutzung des Laplaceschen Entwicklungssatzes $\det A = \det A^\top$ für dreireihige Matrizen nach.

(c) Zeigen Sie ebf. mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes, dass für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

in Spaltendarstellung mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Gleichheit $\det A = -\det \tilde{A}$ gilt.

Aufgabe 4. Gegeben sind die zu unterscheidenden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe eines schriftlichen Verfahrens nachstehende Determinante in

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

worin x und y die kartesischen Koordinaten eines veränderlichen Punktes Q bezeichnen.

(b) Begründen Sie, dass durch die Gleichung (1) die Verbindungsgerade g der Punkte P_1 und P_2 beschrieben ist.

(c) Berechnen Sie schriftlich die Determinante in

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \tag{2}$$

Stellen Sie die Menge aller Punkte $Q(x, y)$, welche die Gleichung (2) erfüllen, in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch dar.

Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung Regeln zur Umformung von Determinanten.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

(a) A, falls $A^n = I$,

(b) B, falls $B^n = 0$,

(c) C, falls $C^2 = C$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^9$.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 23 vorzurechnen.

Aufgabe 6. Gegeben seien die Aussagen

a $:\Leftrightarrow$ „Es gibt eine reelle 2×2-Matrix, deren Determinante 0 ist.“

b $:\Leftrightarrow$ „Zu jeder positiven reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, welche echt zwischen x und dem doppelten von x liegt.“

(a) Drücken Sie die Aussagen unter Verwendung von Quantoren ($\forall$ und $\exists$) und geeigneter Mengen (z.B. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}$, $(0, \infty)$...) aus.

(b) Geben Sie eine sprachliche Formulierung der Negationen von a und b an.

(c) Drücken Sie die Negationen der Aussagen a und b unter Verwendung von Quantoren ($\forall$ und $\exists$) und geeigneter Mengen aus.

(d) Bestimmen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussagen a und b und begründen Sie dies.

Vertiefung

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die folgenden $(n \times n)-$Determinanten durch Überführung der Matrix in eine obere Dreiecksmatrix (ggf. auch Entwicklungssatz verwenden):

(a) $$\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & \mathbf{0} & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \cdots & & \mathbf{0} & \\ n & & & & \end{vmatrix}$$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 0 & x & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -x & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$