Volumenelement

in Kugelkoordinaten

1. Substitution von kartesischen durch Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(r,\varphi,\theta) = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ x_2 &= g_2(r,\varphi,\theta) = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ x_3 &= g_3(r,\varphi,\theta) = r \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

2. Determinante der Funktionalmatrix $\mathrm{J} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial r}, \frac{\partial x_i}{\partial \theta}, \frac{\partial x_i}{\partial \varphi}\right)$ mit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

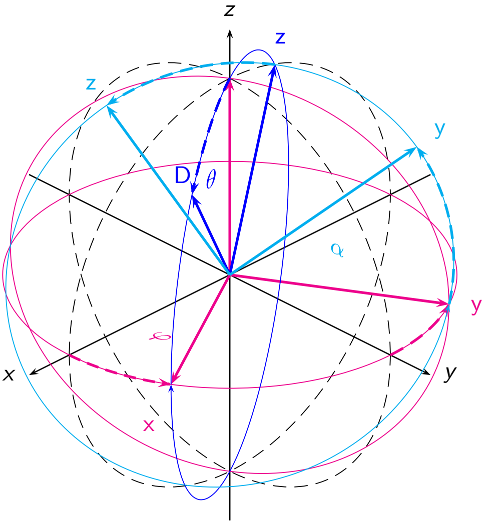
   und Determinante $\det\mathrm{J} = r^2\sin\theta$.

3. Für das Volumenelement in Kugelkoordinaten folgt:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = |\det\mathrm{J}| \cdot \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = r^2\sin\theta \cdot \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

Kugelkoordinaten[1]

Erinnerung



[1] Vergleiche mit Verwendung von geographischen Koordinaten (φ, ϑ) zur Beschreibung von D.