Übungsblatt 30

Aufgabe 1. Gegeben seien die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Länge der Vektoren a, $a + b$ sowie $a_0 := \frac{1}{||a||} \cdot a$.

(b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $a \cdot b$ und $b \cdot a$.

(c) Welchen Winkel schließen die Vektoren a und b ein?

(d) Berechnen Sie die Länge des Vektors $d = a + 2b - c$.

(e) Bestimmen Sie einen Vektor mit Länge 1, der zum Vektor c linear abhängig ist.

(f) Bestimmen Sie einen Vektor f, der dieselbe Länge wie a besitzt, jedoch zu b linear abhängig ist.

Aufgabe 2. Geben Sie zum Vektor n_i alle linear abhängigen Vektoren mit der Länge 1 an.

(a) $n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (b) $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ (c) $n_3 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}^\top$ $(\lambda \in \mathbb{R}^\times)$

Aufgabe 3. Weisen Sie nach, dass für beliebige Vektoren $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}^\times$ die nachstehenden Ungleichungen gelten.

(a) $|a \cdot b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ (Schwarzsche Ungleichung)

(b) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung)

Hinweis: Zum Nachweis der Dreiecksungleichung ist es möglich zunächst

$$\|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

zu betrachten und hierauf die Schwarzsche Ungleichung anzuwenden.

Aufgabe 4. Gegeben sind im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte.

(a) $a \cdot b$ (b) $a \times b$ (c) $a \cdot (b \times c)$ (d) $a \cdot (b \cdot c)$

(e) $(a \times b) \times c$ (f) $a \times (b \times c)$ (g) $\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$ (h) $(a \times c) \cdot (b \times c)$.

Hinweis: Das Symbol $\times$ bezeichnet hierbei das Vektorprodukt, während das Symbol $\cdot$ für verschiedene Produktbildungen gesetzt ist

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 26 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ein so genanntes orthonormiertes System bilden, d. h. v_1, v_2 und v_3 sind Einheitsvektoren, die paarweise einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ einschließen.

Vertiefung

Aufgabe 6. Gegeben sind fünf Punkte in der Ebene mit den Ortsvektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezogen auf ein gewähltes kartesisches Koordinatensystem.

(a) Berechnen Sie die quadratische Gleichung in x_1 und x_2

$$\lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot x_2^2 + \lambda_3 \cdot x_1 x_2 + \lambda_4 \cdot x_1 + \lambda_5 \cdot x_2 + \lambda_6 = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

jenes Kegelschnitts k, der die Punkte aus Formel (1) enthält.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden Koeffizienten λ_j in Formel (2) auf.

(b) Zeigen Sie, dass die Determinantengleichung in x_1, x_2 (als Koordinaten eines allgemeinen Punktes)

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \\ a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \\ d_1^2 & d_1 d_2 & d_2^2 & d_1 & d_2 & 1 \\ e_1^2 & e_1 e_2 & e_2^2 & e_1 & e_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

eine Gleichung des Kegelschnitts in $\mathbb{R}^2$ ist, der durch fünf verschiedene Punkte mit den Ortsvektoren $a = (a_1; a_2)^\top$, ..., $e = (e_1; e_2)^\top$ eindeutig bestimmt ist.