

Übungsblatt 21

Aufgabe 1. Gegeben ist ein Torus Φ , der durch Rotation eines Kreises k um eine Achse in der Kreisebene überstrichen wird, siehe Abbildung 1.

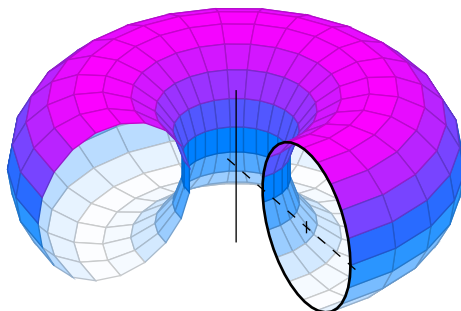


Abbildung 1: Torus Φ , erzeugt durch stetiges Rotieren eines Kreises k um Gerade in Kreisebene.

Wird die x -Achse als Drehachse gewählt, so lässt sich k in der xy -Ebene wählen durch

$$x = r \cdot \cos \alpha, \quad y = R + r \sin \alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

worin $r > 0$ bzw. $R > 0$ den Kreisradius von k bzw. den Abstand des Mittelpunktes von k zur Drehachse beschreiben.

Berechnen Sie mithilfe eines 3-fach Integrals den Volumenanteil von Φ , der durch Drehen

- (a) der Kreisscheibe zu $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
- (b) des Viertelkreissektors zu $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$
- (c) des Viertelkreissektors zu $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

überstrichen wird.

Aufgabe 2. Für die *Flächenmasse* m eines ebenen Flächenstücks B_2 gilt

$$m = \rho(x_1, x_2) \cdot A \quad \Longrightarrow \quad m = \int \int_{B_2} \rho(x_1, x_2) \, dA$$

worin dA das Flächenelement und ρ die Massenverteilung bezeichnen.

Stellen Sie Zweifachintegrale auf, mit denen sich die Masse m der folgenden Bereiche B_2 mit nichthomogener Masseverteilung ρ elementar berechnen lässt. Berechnen Sie diese.

- (i) Eine Kreisscheibe mit dem Radius R , deren (Flächen-) Dichte $\rho(x, y)$ in jedem Punkt proportional zum kürzesten Abstand dieses Punktes vom Rand der Kreisscheibe ist.
- (ii) Eine durch die Ellipse k mit der Gleichung

$$4x^2 + y^2 = 4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

begrenzte ovale Scheibe, deren Massendichte $\rho(x, y)$ im Punkt $P(x, y)$ proportional zum Betrag der Ordinate ist.

Anleitung: Fertigen Sie jeweils eine Skizze an und bestimmen Sie darin einen Normalbereich unter Verwendung geeigneter Koordinaten (kartesisch/Polarkoordinaten).

Aufgabe 3. Für Körper B mit homogener Masseverteilung - d. h. deren Dichte ist ortsunabhängig und damit $\rho(x, y, z) = \text{const.}$ - erfolgt die Schwerpunktsberechnung gemäß

$$x_s = \frac{1}{V} \int_B x \, dV, \quad y_s = \frac{1}{V} \int_B y \, dV, \quad z_s = \frac{1}{V} \int_B z \, dV \quad (2)$$

wobei V das Körpervolumen und dV das Volumendifferential (-element) bezeichnen.

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Halbkugel B mit Radius R , deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und die symmetrisch zur x -Achse gelegen ist.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 17 vorzurechnen.

Aufgabe 4. Gegeben ist eine Diskusscheibe, deren Mantel durch stetiges Rotieren des Halbkreises zu

$$y(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r], \quad R, r > 0 \quad (3)$$

um die x -Achse sowie die Ebenen zu $x = \pm r$ erzeugt wird.

Berechnen Sie das Volumen der Diskusscheibe

- (a) mit Hilfe eines 3-fach Integrals
- (b) unter Benutzung eines 1-fach Integrals.

Vertiefung

Aufgabe 5. Gegeben sind ein Kreisbogen k zum Mittelpunktswinkel α mit Anfangspunkt A und Endpunkt B .

Des Weiteren ist eine Folge von Polygonen

$$\{P_n : n = 2^m, m \in \mathbb{N}\}$$

mit 2^m gleichlangen Strecken gegeben, deren Eckpunkte auf k liegen und deren Anfangspunkt A und Endpunkt B sind. Die Polygone entstehen durch fortwährende Halbierung der Teilbögen von k .

- (a) Berechnen Sie die Eckenschwerpunkte S_n der Polygone P_n in Abhängigkeit der Seitenzahl $n \in \{1, 2, 4, 8, \dots\}$. Verwenden Sie hierfür ein geeignetes angepasstes Koordinatensystem.
- (b) Ermitteln Sie die Grenzlage $\lim S_n$ für $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie die Reihenentwicklung der Sinus- bzw. Kosinusfunktion sowie die Summe der endlichen Reihe $\sum_{i=1}^n i^k$.