Übungsblatt 18

Aufgabe 1. Gegeben sind fünf Punkte der Ebene

$$A(0,1), \quad B(1,2), \quad C(2,4), \quad D(3,4) \quad \text{und} \quad E(4,2) \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie zu den in Formel (1) gegebenen Punkten die Ausgleichsgerade p mit

$$y = p(x) = a_0 + a_1 x \tag{2}$$

unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Anleitung: Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_i $(i = 0, 1)$ in Gleichung (2) auf.

(b) Zeigen Sie, dass die Ausgleichsgerade aus Aufgabenteil (a) den Schwerpunkt der in Formel (1) gegebenen Punkte enthält.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Messpunkte $P_i(x_i, y_i)$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

x	0	1	2	3
y	2.00	5.30	7.50	8.80

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die zugehörige Ausgleichsgerade

$$y = p(x) = b_0 + b_1 x$$

(b) Stellen Sie Messpunkte und Aufgleichsgerade in einem Koordinatensystem dar.

(c) Bestimmen Sie analog zu Aufgabe (a) die Ausgleichsparabel $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ und tragen Sie diese in das Koordinatensystem ein.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nutzen Sie die Lagrange Methode, um die Stellen möglicher Extrema der Funktion f unter der Bedingung $g(x, y) = 0$ zu ermitteln, falls f und g gegeben sind durch

(a) $f(x, y) = x^2 + y, \quad g(x, y) = x - y + 2,$

(b) $f(x, y) = x + 2y, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$

(c) $f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1.$

Aufgabe 4. Es soll die Entfernung d zwischen den Punkten P und Q ermittelt werden. Da die direkte Verbindungsstrecke nur schwer zugänglich ist, wird ein dritter Punkt S gewählt und zunächst die Entfernung p zwischen von P und S, sowie Entfernung q zwischen Q und S gemessen. Außerdem wird der Winkel $\alpha = \measuredangle(PSQ)$ bestimmt. Die Genauigkeit der Längenmessungen liegt bei ± 10[cm] und die Genauigkeit der Winkelmessungen bei $\pm 1' = \pm \frac{1}{60}^\circ$. Als Messwerte ergab sich $p_0 = 352.7$[m], $q_0 = 420.1$[m], $\alpha_0 = 67°14'$

Ermitteln Sie den Abstand d und geben Sie mittels dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz eine näherungsweise Schranke für den Fehler bei dieser Berechnung an.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 18 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Zerlegen Sie die nachstehenden rationalen Funktionen $f : x \mapsto y = f(x)$ mit $x \in D \subset \mathbb{R}$ in eine Summe aus ganzrationalem und echt gebrochen rationalem Anteil.

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen qualitativ (ohne Funktionswerte zu bestimmen).

$$f(x) = \frac{x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4}{x^4 + 2x^2 + 1} \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{x^8 - x^4 + 2x - 1}{x^2 - 1} \tag{4}$$

$$f(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x+3)\cdot(3x-4)\cdot(x^2+1)}{(2x-6)\cdot(x^2-1)} \tag{5}$$

Vertiefung

Aufgabe 6. Entwickeln Sie einen Ansatz zur Bestimmung einer Ausgleichskurve zur Polynomfunktion

$$y = f(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n \quad (n \in \mathbb{N},\, b_n \neq 0)$$

für m Messpunkte (x_i, y_i), wobei $m > n + 1$, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.