

Übungsblatt 16

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine Gleichung der Tangentialebene an die Graphenfläche

$$G_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y) \right\}$$

der nachstehenden Funktionen $f : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$ im Punkt P .

(a) $z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad D = \mathbb{R}^2, \quad P(1, 2, f(1, 2))$

(b) $z = f(x, y) = y + \ln\left(\frac{x}{y}\right), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y > 0\}, \quad P(1, 1, f(1, 1))$

Aufgabe 2. Gegeben ist eine Parallelschaltung aus zwei ohmschen Widerständen mit $R_1 = (100 \pm 10)\Omega$ und $R_2 = (400 \pm 20)\Omega$, d. h. mit maximalen absoluten Messunsicherheiten $\delta R_1 = 10\Omega$ und $\delta R_2 = 20\Omega$.

(a) Berechnen Sie den elektrischen Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung des vollständigen Differentials der Funktion

$$(R_1, R_2) \mapsto R = f(R_1, R_2), \quad (R_1, R_2) \in D$$

näherungsweise die maximale absolute Messunsicherheit δR des elektrischen Gesamtwiderstandes.

Aufgabe 3. Gegeben ist eine reelle Größe $u = f(x, y)$ als Funktion zweier Größen x und y mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie unter Benutzung des vollständigen Differentials:

(a) Ist $f(x, y) = x \cdot y$, so ist der maximale relative Fehler des Produktes u gleich der Summe der maximalen relativen Fehler der Faktoren x und y .

(b) Ist $f(x, y) = \frac{x}{y}$, so ist der maximale relative Fehler des Quotienten u gleich der Summe der maximalen relativen Fehler aus Divident x und Divisor y .

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 16 vorzurechnen.

Aufgabe 4. Geben Sie jeweils, sofern möglich, eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften an!

(a) (a_n) sei nach oben beschränkt.

(d) (d_n) sei unbeschränkt, aber nicht monoton.

(b) (b_n) sei beschränkt und streng monoton steigend.

(e) (e_n) sei unbeschränkt und konvergent.

(c) (c_n) sei beschränkt, aber nicht konvergent.

(f) (f_n) sei monoton, unbeschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 5. Geben Sie die ersten vier Glieder der nachstehenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$ an.

(a) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

(b) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Vertiefung

Aufgabe 6. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie für $(x, y) \neq (0, 0)$ die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y), \quad f_y(x, y), \quad f_{xy}(x, y) \quad \text{und} \quad f_{yx}(x, y) \tag{1}$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in (1) an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$.

(c) Berechnen Sie $f_{xy}(0, 0)$ und $f_{yx}(0, 0)$ und vergleichen Sie diese unter Verwendung des Satz von Schwarz.