

### Übungsblatt 31

---

**Aufgabe 1.** Der Vektor des Drehmoments  $\vec{M}$  an einem Körper berechnet sich gemäß

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

worin  $\vec{F}$  den Vektor der wirkenden Kraft und  $\vec{r}$  den Abstandsvektor vom Bezugspunkt des Drehmoments zum Angriffspunkt der Kraft bezeichnen.

Eine durch die Punkte  $P_0(0; 0; 0)$  (1m) und  $P_1(1; 1; 1)$  (1m) verlaufende Stange sei in  $P_0$  drehbar gelagert.

Berechnen Sie den Drehmomentenvektor  $\vec{M}$  (1Nm), der durch eine in  $P_1$  angreifende Kraft  $\vec{F}$  (1N) im Drehpunkt erzeugt wird. Geben Sie ebenfalls dessen Betrag an.

(a)  $\vec{F} = (1, 1, 1)$  (1N)    (b)  $\vec{F} = (1, -2, 3)$  (1N).

**Aufgabe 2.** Gegeben sind die Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^3$  durch  $v = (0, 2, 2)^\top$  sowie  $w = (1, 0, 2)^\top$ .

(a) Bestimmen Sie die Normalprojektion  $w_1$  des Vektors  $w$  auf den Untervektorraum

$$M = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie ebs.  $w_2$  mit  $w_1 + w_2 = w$ .

(b) Geben Sie alle Orthonormalsysteme<sup>1</sup>  $\{v_1, v_2, v_3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  an, für die gelten

$$(v_1 \times v_2 = o) \quad \wedge \quad (v_1 \cdot v_2 > 0) \quad \wedge \quad (v_2 \times v_3 = o)$$

wobei  $\times$  bzw.  $\cdot$  Vektor- bzw. Skalarprodukt bezeichnen und  $o \in \mathbb{R}^3$  den Nullvektor beschreibt.

(c) Berechnen Sie die Richtungskosinus von  $w$  bezüglich  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Geben Sie ebf. die Winkel an, die  $w$  mit den Basisvektoren einschließt.

**Aufgabe 3.** Gegeben sind die Vektoren  $a \in \mathbb{R}^3$  und  $b \in \mathbb{R}^3$  mit den Komponenten

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Einträge von Matrizen  $A$  und  $B$ , so dass gelten:  $a \times b = A \cdot b = B \cdot a$ .

**Aufgabe 4.** Berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b)  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(c)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d)  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

---

<sup>1</sup>Ein Orthonormalsystem besteht aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren.

**Aufgabe 5.** Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante von  $A$ .
- (b) Berechnen Sie  $A^2 = A \cdot A$ .
- (c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom (bzw. die charakteristische Gleichung) von  $A$ .
- (d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von  $A$ .

**Aufgabe 6.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\lambda_1 = 2$  ein Eigenwert von  $A$  ist und berechnen Sie alle weiteren Eigenwerte.
- (b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 2$ .

**Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 27 vorzurechnen.**

**Aufgabe 7.** Gegeben ist die Kurve  $k \subset \mathbb{R}^3$  als Wertebereich der Funktion  $f$  mit

$$f : t \mapsto y = f(t) = \begin{pmatrix} 1 \cdot t^3 - 9 \cdot t^2 + 24 \cdot t - 14 \\ 9 \cdot t^2 - 30 \cdot t + 20 \\ -7 \cdot t^3 + 21 \cdot t^2 - 18 \cdot t - 8 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

Die Darstellung der vektorwertigen Funktion in Formel (1) wird *Monomform* genannt.

- (a) Ermitteln Sie unter Ausschreiben der Bernstein-Polynome  $B_k^n(t)$  ein lineares Gleichungssystem, mit dem sich die Bernstein-Polynome  $B_k^3(t)$  mit  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$  als Linearkombinationen aus den Monomen  $1, t, t^2$  und  $t^3$  berechnen lassen.
- (b) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des linearen Gleichungssystems in Aufgabenteil (a) die Bézier-Darstellung der Funktion  $f$  in Formel (1) und geben Sie die zugehörigen Kontrollpunkte an.
- (c) Skizzieren Sie die Bézier-Kurve zusammen mit ihrem Kontrollpolygon durch orthogonale Projektion in die  $xy$ -Ebene (vgl. Darstellende Geometrie).

### Vertiefung

**Aufgabe 8.** Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 = 1$$

stets komplex konjugiert und vom komplexen Betrag 1 sind. Berechnen Sie die zugehörigen (komplexen) Eigenvektoren.