Übungsblatt 23

Aufgabe 1. Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f : x \mapsto y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \tag{1}$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, 1, \ldots, 4\}$ bildet mit den Operationen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

für alle Funktionen f, g der Form (1) und alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum V über $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die den Nullvektor bildende Funktion $o \in V$ an.

(b) Gegeben sind die Funktionen h_1 und h_2 mit Funktionstermen

$$h_1(x) = x^4 - 4x^2 \quad \text{und} \quad h_2(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Ermitteln Sie den Funktionsterm der Funktion $k \in V$ mit $(h_1 + h_2 + k)(x) = o(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Stellen Sie die Funktionsgraphen G_{h_1}, G_{h_2} und G_k im Intervall $x \in [-2, 2]$ in einem Koordinatensystem graphisch dar.

Interpretieren Sie die Summe $h_1 + h_2$ der Funktionen aus Aufgabenteil (b).

(d) Stellen Sie die zum Funktionsterm $g(x) = 2x^4 + 4x^2 - 7$ gehörende Funktion g als Linearkombination der folgenden Funktionen dar:

$$f_0 : x \mapsto 1\,, \quad f_1 : x \mapsto x\,, \quad f_2 : x \mapsto x^2\,, \quad f_3 : x \mapsto x^3 \quad \text{und} \quad f_4 : x \mapsto x^4 \tag{2}$$

(e) Stellen Sie die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Funktionsterm

$$h(x) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot f_k(x)$$

in der Form (1) dar und berechnen Sie die Koeffizienten.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Funktionen $f_i : x \mapsto y = f_i(x)$ mit

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sin(x - x_0).$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest gewählt ist (d. h. x_0 ist reelle Zahl).

(a) Stellen Sie f_3 als Linearkombination von f_1 und f_2 dar.

(b) Bilden Sie eine Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \lambda_3 \cdot f_3(x), \quad \lambda_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, 3\}$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ den Nullvektor ergibt, ohne dass alle λ_i Null sind.

Aufgabe 3. Der Zahlkörper $\mathbb{Z}_2$ enthält nur die Elemente 0 und 1. Es gelten die Rechenregeln

$$0+0=1+1=0\,(!),\quad 0+1=1+0=1 \quad \text{sowie} \quad 0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0,\quad 1\cdot 1=1 \tag{3}$$

Die Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in \mathbb{F}_2$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bildet einen Vektorraum V über $\mathbb{F}_2$.

(a) Geben Sie alle Vektoren für $n = 3$ an.

(b) Berechnen Sie die Linearkombination

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Wie lässt sich in V der bzgl. Addition inverse Vektor $-a \in V$ zu einem Vektor $a \in V$ beschreiben.

Aufgabe 4. Gegeben ist ein periodisches Signal durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto y = f(x) = 3\sin x \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\text{sowie} \quad x \mapsto y = f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion f soll durch eine Linearkombination der Form

$$x \mapsto y = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x \cdot \cos(4kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{sowie} \quad b_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x \cdot \sin(4kx)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ in Abfängigkeit des Parameters $n \in \mathbb{N}^*$ angenähert werden.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraph G_f zur Funktion f im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Geben Sie in diesem Intervall die Sprungstellen von f an.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k in Formel (4). Geben Sie die Funktionsterme zu den Funktionen S_1 und S_3 mit gemeinsamem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ an.

Hinweis: Für $k > 0$ lassen sich die Integrale in (4) mittels zweimaliger partieller Integration berechnen.

(c) Plotten Sie die Funktionsgraphen zu S_1, S_3 und S_{10} (gemeinsam!) im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 19 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Zahlen z, welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

(a) $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0$

(b) $|z| = 2 \quad \wedge \quad (z - \mathrm{i}) \in \mathbb{R}$

Vertiefung

Aufgabe 6. Prüfen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ jeweils auf lineare Abhängigkeit:

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$