Determinanten

n-ter Ordnung

Gegeben ist eine n-reihige reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit der Komponentendarstellung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Es lässt sich rekursiv der Wert der Determinante n-ter Ordnung $\det A$ berechnen

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

$$\text{wobei} \quad A_{1j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{1j} \quad \ldots \quad \text{algebraisches Komplement zu } a_{1j}$$
$$D_{1j} \quad \ldots \quad \text{Unterdeterminante } (n-1)\text{-ter Ordnung}$$

(Entwicklung nach 1-ter Zeile[1]), z. Bsp.:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \ 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \ 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \ 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -108 - 54 + 162 = 0$$

[1] Der Wert der Determinante ändert sich nicht, falls anstelle der 1-ten Zeile nach i-ter Zeile oder j-ter Spalte entwickelt wird.