Übungsblatt 24

Aufgabe 1. Für drei Vektoren a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ sowie Zahlen λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\lambda + 1)a + (2\mu - 6)b + (3\nu^2 + 12\nu + 12)c = o \tag{1}$$

wobei $o \in \mathbb{R}^n$ den Nullvektor beschreibt.

(a) Leiten Sie aus (1) Bedingungen an λ, μ und ν für den Fall ab, dass die Vektoren a, b, c linear unabhängig sind. Bestimmen Sie λ, μ und ν.

(b) Geben Sie eine hinreichende Bedingung an, unter welcher sich c als Linearkombination der Vektoren a und b darstellen lässt.

Aufgabe 2. Je endlich viele der Funktionen $f : x \mapsto y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit Funktionstermen $\sin x$, $\cos x$, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, ... sind linear unabhängig.

Bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich die reellen Zahlen α, β, γ, δ, ϵ, φ aus der Linearkombination

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot \cos x + \alpha \cdot \cos(2x) + \beta \cdot \sin x + \beta \cdot \sin(2x) \\ &+ \gamma \cdot \cos(2x) + \gamma \cdot \cos(3x) + \delta \cdot \sin(2x) + \delta \cdot \sin(3x) \\ &+ \epsilon \cdot \sin(3x) + \varphi \cdot \cos(3x) \\ &= 3 \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{aligned} \tag{2}$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sein soll.

Aufgabe 3. Gegeben ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum V aller linearen Funktionen $f : x \mapsto y = f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ mit gemeinsamem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ sowie Koeffizienten $a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_1 \in \mathbb{R}$.

In V werden insbesondere die Funktionen

$$f_0 : x \mapsto y = f_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad f_1 : x \mapsto y = f_1(x) = x$$

betrachtet.

(a) Weisen Sie nach, dass $B = [f_0, f_1]$ eine Basis des Vektorraums V bildet.

(b) Zeigen Sie, dass mit B aus Aufgabenteil a auch $\tilde{B} = [f_0 + f_1, f_0 - f_1]$ eine Basis von V bildet.

Aufgabe 4. Gegeben ist die *Schwingungsgleichung* einer freien, ungedämpften Schwingung

$$\ddot{f}(t) + 4 \cdot f(t) = 0 \tag{3}$$

welche eine die Schwingung beschreibende reelle Funktion $f : t \mapsto x = f(t)$ und deren zweite Ableitungsfunktion mit $\ddot{f}(t) := \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t)$ für alle t auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erfüllen.

Die Schwingungsgleichung (3) wird durch die (komplexen!) Funktionen

$$f_1 : t \mapsto x = f_1(t) = e^{2\mathrm{i}\cdot t} \quad \text{und} \quad f_2 : t \mapsto x = f_2(t) = e^{-2\mathrm{i}\cdot t} \tag{4}$$

gelöst, worin $\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{i}^2 = -1$ die imaginäre Einheit und e die Euler-Zahl darstellen.

(a) Stellen Sie die reellen Funktionen

$$g_1 : t \mapsto x = g_1(t) = \sin(2t) \quad \text{und} \quad g_2 : t \mapsto x = g_2(t) = \cos(2t) \tag{5}$$

als Linearkombination von f_1 und f_2 aus Formel (4) mit komplexen Koeffizienten dar.

(b) Weisen Sie nach, dass g_1 und g_2 aus Formel (5) sowie jede Linearkombination $g = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \cdot g_i$ mit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Schwingungsgleichung (3) lösen.

Zeigen Sie, dass sich jede reelle Lösungsfunktion g in der Form

$$g : t \mapsto x = g(t) = A \cdot \sin(2t + \varphi)$$

mit $A > 0$ und $\varphi \in [0; 2\pi)$ darstellen lässt.[1]

(c) Zeigen Sie, dass die Menge aller Linearkombinationen $g = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \cdot g_i$ aus Aufgabenteil b einen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit Dimension $\dim V = 2$ bilden.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 20 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Linearkombination $2(a - b) + 3(a + b)$.

(b) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob a und b (ebenso $a - b$ und $a + b$) linear unabhängig sind.

(c) Tragen Sie die Vektoren a, b, $a - b$ und $a + b$ als Pfeile im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems in $\mathbb{R}^2$ an.

(d) Zeigen Sie allgemein, dass Summenvektor $a + b$ und Differenzvektor $a - b$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, wenn dies für Vektoren $a \in \mathbb{R}^2$ und $b \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Vertiefung

Aufgabe 6. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne

$$V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^i,\ a_0 \in \mathbb{R},\ a_i \in \mathbb{R} \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$$

die Menge aller reellen Polynomfunktionen vom Grad $\operatorname{grad} f \leq n$.

Zeigen Sie, dass die Menge aller Beziér-Polynome $B_j^n(x)$ mit

$$B_j^n(x) = \binom{n}{k} \cdot x^j \cdot (1 - x)^{n-j}$$

(a) linear unabhängig in V ist

(b) eine Basis von V bildet

[1] Die Parameter A bzw. φ in g bedeuten physikalisch die Amplitude bzw. Anfangsphase der freien, ungedämpften Schwingung.