Übungsblatt 25

Aufgabe 1. Überprüfen Sie durch Rechnung den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen.

(a) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^\top$$

bilden keine Basis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$, jedoch eine Basis des Untervektorraums $U \subset V$ mit $x_1 = 0$ und $\dim U = 2$.

(b) Jede reelle Matrix vom Typ $(2, 2)$ ist eindeutig als Linearkombination der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellbar.

Aufgabe 2. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls dies möglich ist:

$A + B$, $A^\top$, $B - C$, AB, BA, $AC^\top$, $5A$, $2A + 3D^\top$, BE, EB, E^{2017}

Aufgabe 3. Gegeben ist die Abbildung φ vermöge

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2,2} \quad \text{mit} \quad z \mapsto \varphi(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Hierin bezeichnen $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$ Real- bzw. Imaginärteil der Zahl $z \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\varphi(z) | z \in \mathbb{C}\}$$

einen Untervektorraum U des Vektorraums der reellen Matrizen vom Typ $(2, 2)$ bildet.

(b) Geben Sie eine Basis in U an und bestimmen Sie $\dim U$.

(c) Zeigen Sie, dass die Addition in $\mathbb{C}$ unter φ in die Addition in U übertragen wird vermöge

$$z_1 + z_2 \mapsto \varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2) \tag{2}$$

Erklären Sie die in Formel (2) auftretenden Summenzeichen.

(d) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $\mathbb{C}$ unter φ in die Multiplikation in U übertragen wird vermöge

$$z_1 \cdot z_2 \mapsto \varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2) \tag{3}$$

Erklären Sie die in Formel (3) auftretenden Produktzeichen.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 21 vorzurechnen.

Aufgabe 4. Berechnen Sie für die reellen quadratischen Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right\}$$

jeweils die Matrizen $A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$ und $A_a = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)$.

Was fällt Ihnen an den Matrizen A_s und A_a auf?

Vertiefung

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Potenzen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}^9$,

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}^{17}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{42}$,

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{23}$.