Übungsblatt 17

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie, falls vorhanden, zu den Funktionen

$$f : (x,y) \mapsto z = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in D$$

die Lage und Art der lokalen Maxima und der lokalen Minima.

(a) $f(x,y) = 3x^3y - x^2y^2 + x$ mit $D = \mathbb{R}^2$

(b) $f(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$ mit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

(c) $f(x,y) = (x - 2y)^3 - x^3$ mit $D = \mathbb{R}^2$

(d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ mit $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

(e) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ mit $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie von der Funktion $f : (x,y) \mapsto z = f(x,y)$ mit

$$f(x,y) = x + |x - y| \quad \text{und} \quad D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| \le 1, |y| \le 2\Big\}$$

die Argumente (x,y) des absoluten Maximums und des absoluten Minimums, d. h. für die $z_{\max}$ und $z_{\min}$ existieren.

Aufgabe 4. Eine Funktion, die den drei Ortskoordinaten x, y, z eines Punktes aus einem Bereich des $\mathbb{R}^3$ eine skalare Größe $f(x,y,z)$ eindeutig zuordnet, heißt *räumliches Skalarfeld*. $f(x_0,y_0,z_0)$ heißt *Potential* des Punktes $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

(a) Berechnen Sie die Bereiche von Punkten $P_0(x_0,y_0,z_0)$ gleichen elektrostatischen Potentials[1]

$$\varphi(x_0,y_0,z_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{-0.5}$$

die von einer Punktladung Q im Koordinatenursprung erzeugt wird.

(b) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld $(x,y,z) \mapsto \operatorname{grad}\varphi(x,y,z)$ zur Funktion

$$\varphi : (x,y,z) \mapsto w = \varphi(x,y,z) \quad \text{mit} \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$$

Begründen Sie, dass der Gradientenvektor $\operatorname{grad}\varphi(x_0,y_0,z_0)$ im $P(x_0,y_0,z_0)$ orthogonal zur Äquipotentialfläche durch P_0 verläuft.[2]

---

[1] Diese werden üblicherweise Äquipotentialbereiche (-flächen) genannt.

[2] Die vektorielle Größe $-\operatorname{grad}\varphi(x_0,y_0,z_0)$ entspricht der elektrischen Feldstärke in P_0.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 17 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Gegeben seien die Werte $(x_1, ..., x_n)$. Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens ($\sum$):

(a) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{20}^2$

(b) $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{19} - x_{20})^2$

(c) $x_2 + x_4 + \ldots + x_{20}$

(d) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{19} - x_{20}$

Aufgabe 6.

(a) Lösen Sie die folgenden Summenzeichen auf:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(1+i)x^i$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{2} 3 \cdot i^2$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=13}^{17}(22-i)^{-1}$

(iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(-1)^i(i-1)$

(v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i$

(vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{42}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

(b) Gegeben sind reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ sowie $y_1, \ldots, y_n$. Wir setzen $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ und $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$. Zeigen Sie dass folgende Gleichungen gelten:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\overline{x}^2$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y}$

(c) Lösen Sie die folgenden Produktzeichen auf:

(i) $\displaystyle\prod_{i=1}^{10} i$

(ii) $\displaystyle\prod_{i=3}^{6}(i-1)x$

(iii) $\displaystyle\prod_{j=0}^{50} x^j$

(iv) $\displaystyle\prod_{k=0}^{42} 4k^2x^{2k}$

(v) $\displaystyle\prod_{k=-2}^{2} 2^k$

(vi) $\displaystyle\prod_{j=1}^{3}\Big(2j\prod_{k=2}^{4}(kj)\Big)$

Vertiefung

Aufgabe 7. Es soll die Entfernung d zwischen den Punkten P und Q ermittelt werden. Da die direkte Verbindungsstrecke nur schwer zugänglich ist, wird ein dritter Punkt S gewählt und zunächst die Entfernung p zwischen von P und S, sowie Entfernung q zwischen Q und S gemessen. Außerdem wird der Winkel $\alpha = \measuredangle(PSQ)$ bestimmt. Die Genauigkeit der Längenmessungen liegt bei ± 10[cm] und die Genauigkeit der Winkelmessungen bei $\pm 1' = \pm\frac{1}{60}^\circ$. Als Messwerte ergab sich $p_0 = 352.7$[m], $q_0 = 420.1$[m], $\alpha_0 = 67^\circ 14'$

Ermitteln Sie den Abstand d und geben Sie mittels dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz eine näherungsweise Schranke für den Fehler bei dieser Berechnung an.