

### Übungsblatt 26

---

**Aufgabe 1.** Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie zu den vorstehenden Matrizen alle geordneten Paare  $(X, Y)$  an, für die das Matrizenprodukt  $X \cdot Y$  erklärt ist.
- (b) Berechnen Sie die Matrix (i)  $4 \cdot A^2 - B \cdot C$  und (ii)  $C \cdot B - 2 \cdot E$ .
- (c) Berechnen Sie alle komplexen Matrizen  $K$  mit

$$K^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Runden Sie die Matrixeinträge auf drei Nachkommastellen.

**Aufgabe 2.** Gegeben sind die Drehmatrizen

$$D_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad D_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkeln  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ . Von der durch das Matrizenprodukt

$$D(\varphi, \psi) = D_1(\varphi) \cdot D_2(\psi)$$

mit  $D = (d_{jk})_{j,k=1,\dots,3}$  beschriebenen resultierenden Drehmatrix sind bekannt

$$d_{13} = -\frac{1}{2}, \quad d_{22} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad d_{23} > 0 \quad \text{und} \quad d_{33} > 0 \quad (1)$$

Berechnen Sie aus (1) die Drehwinkel  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  und geben Sie das Matrizenprodukt  $D(\varphi_0, \psi_0)$  an.

**Aufgabe 3.**

- (a) Rechnen Sie die Gleichheit der Terme  $(A + B) \cdot C$  und  $A \cdot C + B \cdot C$  sowie  $(A \cdot B) \cdot C$  und  $A \cdot (B \cdot C)$  für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

nach.

- (b) Zeigen Sie, dass allgemein

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

für Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$  gilt.

**Aufgabe 4.** Seien  $A, B, C$  und  $D$  Matrizen. Formen Sie die folgenden Ausdrücke um.

- (a)  $(A + B)^2$  (b)  $(3A - A^2)^2$   
(c)  $(ABA^{-1})^n$  (d)  $(ABA^{-1})^{-1}$

**Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 22 vorzurechnen.**

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie für die reellen quadratischen Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right\}$$

jeweils die Matrizen  $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$  und  $A_a = \frac{1}{2}(A - A^T)$ .

Was fällt Ihnen an den Matrizen  $A_s$  und  $A_a$  auf?

## Vertiefung

**Aufgabe 6.** Gegeben sind der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Quaternionen  $\mathbb{H}$ ,  $q \in \mathbb{H}$  und

$$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad \text{mit quaternionalen Einheiten } i, j \text{ und } k$$

und reellen Koeffizienten  $a, b, c$  und  $d$  sowie die Abbildung  $\varphi$  vermöge

$$\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{2,2} \quad \text{mit} \quad q \mapsto \varphi(q) = \begin{pmatrix} a + b \cdot i & c + d \cdot i \\ -c + d \cdot i & a - b \cdot i \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

in die Menge der komplexen Matrizen vom Typ  $(2, 2)$ .

Die Zahlen  $\bar{z}$  bzw.  $\bar{w}$  in Formel (2) sind komplex-konjugiert zu  $z \in \mathbb{C}$  bzw.  $w \in \mathbb{C}$ , während  $i$  mit  $i^2 = -1$  die imaginäre Einheit bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\varphi(q) \mid q \in \mathbb{H}\}$$

einen Untervektorraum  $U$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums der komplexen Matrizen vom Typ  $(2, 2)$  bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Untervektorraums  $U$  aus Aufgabenteil a bilden und geben Sie  $\dim U$  an.

(c) Zeigen Sie, dass die (nichtkommutative!) Multiplikation in  $\mathbb{H}$  unter  $\varphi$  in die Multiplikation in  $U$  übertragen wird vermöge

$$q_1 \cdot q_2 \mapsto \varphi(q_1 \cdot q_2) = \varphi(q_1) \cdot \varphi(q_2) \quad (3)$$

Erklären Sie die in Formel (3) auftretenden Produktzeichen.