Übungsblatt 19

Aufgabe 1. Gegeben sind die folgenden Bereichsintegrale.

$$\iint_B \frac{\mathrm{d}b}{(x+y)^2} \qquad B\ldots \text{ Rechteck mit Eckpunkten } A(3;1), B(3;2), C(4;2), D(4;1)$$

$$\iint_B \left(x^2+y\right)\mathrm{d}b \qquad B\ldots \text{ durch Kurven } y=x^2 \text{ und } y^2=x \text{ begrenztes Gebiet}$$

$$\iint_B \cos(x+y)\,\mathrm{d}b \qquad B\ldots \text{ Dreieck mit Seiten auf Geraden zu } y=x,\ x=0,\ y=\pi$$

$$\iint_B (|x|+|y|)\,\mathrm{d}b \qquad B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|+|y|\le 1\right\}$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Bereiche B in der xy-Ebene. Entscheiden Sie, ob B als Normalbereich werden kann (ggf. Typ des Normalbereichs feststellen).

(b) Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen und die Integrationsreihenfolge.

(c) Berechnen Sie die 2-fach Bereichsintegrale.

Hinweis: $\mathrm{d}b$ bezeichnet das Flächenelement in kartesischen Koordinaten. Überlegen Sie, ob $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ oder $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ zu verwenden ist.

Aufgabe 2. Gegeben sind die folgenden Bereichsintegrale.

(i) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int_{x=-1}^{1}\int_{y=|x|}^{1} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(a) Stellen Sie jeweils den Integrationsbereich in der xy-Ebene dar.

(b) Ändern Sie in den Integralen die Integrationsreihenfolge. Passen Sie dabei die Integrationsgrenzen an.

Aufgabe 3. Gegeben sind ebene Bereiche in $\mathbb{R}^2$, welche durch Kurven zu den nachstehenden Gleichungen begrenzt werden.

(a) $y=|x|,\ \ y=1$ (b) $y=1,\ \ x=0,\ \ y=4,\ \ y=x^2$ (c) $x+2y=4,\ \ x+y=6,\ \ x=0$

Stellen Sie Bereichsintegrale zur Berechnung der Flächeninhalte dieser ebenen Bereiche auf und berechnen Sie diese.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten.

(a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=-1}^{4}\int_{z=0}^{\pi}\left(x^2\cdot y\cdot\cos(yz)\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$ (b) $\displaystyle\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{1}\int_{z=y}^{y^2}(y\cdot z\cdot\sin x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 15 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x} \ln(x) \, \mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int x^a \ln(x) \, \mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x$.

Vertiefung

Aufgabe 6. Gegeben ist das Bereichsintegral

$$\int_{y=a}^{b} \int_{x=a}^{b} [f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x)]^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{1}$$

wobei die Funktionen $x \mapsto f(x)$ und $x \mapsto g(x)$ im Intervall $[a; b]$ als integrierbar vorausgesetzt werden. Leiten Sie mit Hilfe des Integrals in Formel (1) die Ungleichung

$$\left[\int_{x=a}^{b} f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_{x=a}^{b} f(x)^2 \, \mathrm{d}x \cdot \int_{x=a}^{b} g(x)^2 \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

her.[1]

[1] Die Ungleichung (2) wird *Schwarzsche Ungleichung* genannt.