Übungsblatt 29

Aufgabe 1. Wahr oder falsch? Begründen Sie!

(a) „Ein wohldefiniertes lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ ist stets lösbar.“

(b) „Vier Vektoren des Raumes $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.“

(c) „Ob eine $n \times n$-Matrix invertierbar ist, lässt sich am Rang erkennen.“

(d) „Ist $\det A \neq 0$, so kennt man den Rang einer $n \times n$-Matrix.“

(e) „Für zwei addierbare Matrizen A, B gilt stets: $rang(A + B) = rang(A) + rang(B)$.“

Aufgabe 2. Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem $A\,X = O$ mit Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{4\times 1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Werte λ, für die $A\,X = O$ die alleinige Lösung $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ besitzt.[1]

(b) Geben Sie alle Werte λ an, für die $A\,X = O$ nicht nur die triviale Lösung besitzt. Berechnen Sie für diese Werte λ die Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 3. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in den Variablen x_1 und x_2.

(a) Weisen Sie analytisch und graphisch nach, dass das lineare Gleichungssystem (1) keine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\left(A^\top \cdot A\right) \cdot x = \left(A^\top \cdot b\right) \tag{2}$$

eine eindeutige Lösung besitzt und berechnen Sie diese.

Stellen Sie die Lösung in Abhängigkeit der Matrizen A und b dar.

(c) Weisen Sie nach, dass für n-reihige Matrizen A ($n \geq 2$) mit $\det A \neq 0$ gilt:

$$A^{-1} = \left(A^\top \cdot A\right)^{-1} \cdot A^\top$$

(d) Kennzeichnen Sie die Lösung von (2) in Bezug auf das lineare Gleichungssystem in (1) graphisch.

---

[1] Die Matrix $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top$ ist Lösungsmatrix jedes homgenen Gleichungssystems und wird *triviale Lösung* von $A\,X = O$ genannt.

Aufgabe 4. Gegeben sei eine polynomiale Funktion $p : x \mapsto p(x)$ mit

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0, \;\; a_j \in \mathbb{R}, \;\; j \in \{0; 1; \ldots; 3\}.$$

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_j von $p(x)$, so dass der zugehörige Funktionsgraph

(i) die Punkte $A(-1; 0)$ und $B(2; 2)$ verbindet, und

(ii) in A den Anstieg $m_A = 0$ sowie in B den Anstieg $m_B = 2$ besitzt.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden Unbekannten a_j auf.

(b) Skizzieren Sie den Funktionsgraph zu $p(x)$ im Intervall $[-1; 2]$. Tragen Sie die Tangenten in den Punkten A und B ein.

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich auf bereits erworbenes Wissen und sind von Ihnen in der Übung der KW 25 vorzurechnen.

Aufgabe 5. Berechnen Sie jeweils alle $t \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & t \end{pmatrix} = 5$

(b) $\det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = 0.$

Vertiefung

Aufgabe 6. Gegeben seien die Matrizen A und D, sowie der Vektor $\underline{b}$ mittels

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Lösen Sie (möglichst geschickt) das Gleichungssystem $A^{-1}D\underline{x} = \underline{b}$.

Aufgabe 7. Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Matrix A in der Darstellung (3) regulär ist. Berechnen Sie im Fall ihrer Existenz die zu A inverse Matrix A^{-1}.

(b) Berechnen Sie, sofern existent, die Lösung $X = (x_{ij})$ der Matrixgleichung

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

wobei A die Matrix aus der Darstellung (3) bezeichnet.