

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)
Sommersemester 2025

1. Übung: Differentialoperatoren

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\mathbf{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

gilt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) = 0$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Rotation von $v(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 + x_2 + x_2 x_3 \\ x_1 + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Divergenz von

$$(a) \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_1 x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 2x_1^2 - x_2 x_3 \\ x_2 e^{x_3} \\ x_1 e^{x_3} + x_2 \end{bmatrix}, \quad (c) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ bzw. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie

$$\operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} \right).$$

Aufgabe 5

Es seien $\alpha \neq 0, n \geq 2$. Berechnen Sie Δu für folgende auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definierten Skalarfelder.

$$u(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\alpha, \quad u(\mathbf{x}) = \ln(\|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Für welche Werte von n, α gilt $\Delta u = 0$?

Aufgabe 6

Gegeben sei das Vektorfeld $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$v(\mathbf{x}) = \frac{c}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Zeigen Sie, dass v eine symmetrische Jacobi-Matrix besitzt, aber kein Potentialfeld in G ist. Woran liegt das?

Aufgabe 7

Überprüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$v(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$$

ein Vektorpotential besitzt und berechnen Sie gegebenenfalls ein Vektorpotential w von v .