
Mathematik für Ingenieure - WS2023/24

Übungsblatt 6

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Berechnen Sie mittels Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme

- (a) $y' = e^y$, (b) $y' = 3x^2y^2$, $y(1) = -\frac{1}{6}$,
(c) $y' = \frac{y-1}{x-1}$, $y(0) = 1$, (d) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(1) = 1$

worin $x \mapsto y$ mit $x \in D$ die gesuchten Funktionen bezeichnen.

Aufgabe 2: Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe geeigneter Substitutionen:

- (a) $y' = 2x - y$, (c) $y' = \frac{2y-x}{x}$, (e) $y' = (1 + x + y)^2$, $y(0) = 2$,
(b) $y' = \frac{x+2y}{x}$ (d) $2xyy' - x^2 = y^2$, (f) $xy' = y \cdot (\ln x - \ln y + 1)$.

Aufgabe 3: Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x \cdot y'(x) = \frac{y(x)^2}{x} + 3 \cdot y(x) + x, \quad y(-1) = 5 \quad (1)$$

in der gesuchten Funktion $x \mapsto y(x)$ mit $x \in D \subset \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie, dass jede Gerade zu einer Gleichung der Form $y = k \cdot x$ mit $k \in \mathbb{R}$ eine Isokline der Differentialgleichung in Formel (1) ist.
(b) Geben Sie den Typ der Differentialgleichung in Formel (1) an.
(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in Formel (1) mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Hinweis: Das zu verwendende Lösungsverfahren ergibt sich unmittelbar aus der expliziten Darstellung der Differentialgleichung in Formel (1).

Aufgabe 4: Die nachstehenden Differentialgleichungen 2. Ordnung sind in expliziter Form

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad (2)$$

gegeben oder lassen sich in diese überführen. Einzelne der Größen x , $y(x)$, $y'(x)$ treten nicht auf.

Diskutieren Sie spezielle Lösungsansätze und berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen.

- (a) $\ddot{y}(t) = 3 + 2t + 5t^2$ (b) $y''(x) = y'(x) - e^x$
(c) $(1 - x^2) \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) = 0$ ($x^2 \neq 1$) (d) $y(x) \cdot y''(x) = (y'(x))^2$

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, (b) $y' = \frac{x+3y}{2x}$, (c) $y' = \frac{x-y}{x-2y}$.

Aufgabe 6: Gegeben ist folgende Differentialgleichung

$$y' = \frac{3x^2 + 2y^2}{2xy}.$$

Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(1) = 2$.

Aufgabe 7: Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Methode die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = 1 + y(x)^2$ (b) $y'(x) = x^2 + 1$ (c) $y'(x) = \frac{2x \cdot y(x)}{1+x^2}$
(d) $y'(x) + y(x) \cdot \tan x = 0$ (e) $y'(x) = \sqrt{\frac{y(x)}{x}}$, $x > 0$ (f) $y'(x) = (x + y(x) + 1)^2$
(g) $y'(x) = \frac{x}{y(x)} - \frac{y(x)}{x}$

in den Funktionen $x \mapsto y$ mit $x \in D$.