Aufgabe Turbulenz-9 (Hydrozyklon)

Ein Hydrozyklon (d_{HZ} = 50mm) wird zur Abtrennung von Schleifpartikeln (ρ_P = 3210 kg/m, φ_V=0.05, Ψ=0.76) aus dem Abwasser (ρ_L = 1000 kg/m³, η_L = 9$*$10^{-4} Pas) eines Polierprozesses genutzt. Er wird mit einem Volumenstromverhältnis (Oberlauf zu Unterlauf) von τ=5 betrieben; der mittlere turbulente Diffusionskoefiizient und die mittlere Zentrifugalbeschleunigung wurden mit Hilfe empirischer Gleichungen zu 4$*$10^{-4} m²/s bzw. 600xg abgeschätzt.

Gehen Sie für die folgenden Berechnungen von einem idealen Strömungskanal aus, dessen Höhe einem Drittel des Hydrozyklondurchmessers entspricht und in dem die Fallbeschleunigung des Schwerefeldes durch die Zentrifugalbeschleunigung ersetzt ist.

a) Wie hoch ist der kleinstmögliche Gesamtabscheidegrad, der unter diesen Bedingungen erreicht werden kann?
b) Ermitteln Sie die effektive Sinkgeschwindigkeit der Median-Trennteilchengröße $x_{T,50}$ auf Basis des Anzapfmodells!
c) Berechnen Sie aus dieser effektiven Sinkgeschwindigkeit den volumenäquivalente Durchmesser der Trennteilchen (d.h. $x_{T,50}$)!
d) Wie hoch ist der Trenngrad für Schleifpartikel, deren Größe beim Zweifachen der Trennteilchengröße aus Teilaufgabe c) liegt?
e) Berechnen Sie die Trenngrade für die Teilchengrößen aus den Teilaufgaben c) und d) mit Hilfe des Suspensionsteilungsmodells!

Aufgabe Turbulenz-9 (Hydrozyklon)

Vorgegebene Werte:

Definition: $\mu m := 10^{-6}\ m$ $\qquad nm := 10^{-9}\ m$

Wasser: $\rho_L := 1000\ \frac{kg}{m^3}$ $\qquad \eta_L := 0.0009\ Pa \cdot s$

Partikel: $\rho_P := 3210\ \frac{kg}{m^3}$ $\qquad \varphi_V := 0.05$ $\qquad \Psi := 0.76$

Hydrozyklon: $d_{HZ} := 50\ mm$ $\qquad h_{Kanal} := \frac{1}{3} \cdot d_{HZ}$

Volumenstromverhältnis: $\tau := 5$

turbulenter Diff.-koeff.: $D_t := 4 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^2}{s}$

Zentrifugalbeschleunigung: $a_Z := 600 \cdot g$ $\qquad$ mit $\qquad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

Lösung:

1. Kleinstmöglicher Gesamtabscheidegrad

Der kleinstmögliche Gesamtabscheidegrad wird bei sehr feinen Partikeln erreicht, für die keine lateralen Konzentrationsgradienten bestehen und der Konzentration im Oberlauf mit jener im Unterlauf übereinstimmt.

min. Gesamtabscheidegrad:
$$\eta_{ges.min} = \frac{c_{m.unter}(x=0) \cdot V_{unter}}{c_{m.ein}(x=0) \cdot V_{ein}} = \frac{V_{unter}}{V_{ein}} = \frac{V_{unter}}{V_{ober} + V_{unter}} = \frac{1}{\tau + 1}$$

$$\eta_{ges.min} := \frac{1}{\tau + 1} \qquad \eta_{ges.min} = 0.167$$

2. Sinkgeschwindigkeit der Mediantrennteilchengröße für das Anzapfmodel

Mediantrenngrenze für AM: $T(x_T) = \left(1 + \tau \cdot e^{-\alpha(x_T)}\right)^{-1} = 0.5$ $\qquad$ mit $\qquad \tau = \frac{VS_o}{VS_u}$

bzw. $\alpha_T = \frac{v_{S.eff.T} \cdot h_{Kanal}}{D_{P.eff}} = \ln(\tau)$

mit $h_{Kanal} = \frac{1}{3} \cdot d_{HZ}$ $\qquad D_{P.eff} = D_t$

Parameter α für x_T: $\alpha_T := \ln(\tau)$ $\qquad \alpha_T = 1.609$

effektive Sinkgeschw. für x_T: $v_{S.eff.T} := \frac{\alpha_T \cdot D_t}{h_{Kanal}}$ $\qquad v_{S.eff.T} = 38.6 \frac{mm}{s}$

3. Mediantrennteilchengröße

Konzentrationskorrektur: $v_{S.eff} = v_{S.P} \cdot (1 - \varphi_V)^n$ mit $n = \text{funct}(Re_P \text{ oder } Ar \text{ oder } Lj)$

Abschätzung von Lj: $Lj_{eff} := \dfrac{\rho_L^2 \cdot v_{S.eff.T}^3}{a_Z \cdot (\rho_P - \rho_L) \cdot \eta_L}$ $\quad Lj_{eff} = 4.924 \cdot 10^{-3}$

d.h. Lj_{eff}<0.017, folglich Stokes-Bereich und n=4.65

Einzelpartikelsinkgeschw.: $v_{S.P.T} := \dfrac{v_{S.eff.T}}{(1 - \varphi_V)^{4.65}}$ $\quad v_{S.P.T} = 49.0 \cdot \dfrac{mm}{s}$

Formkorrektur: $v_{S.P} = v_{S.K} \cdot k_\Psi$ mit $k_{\Psi.Stokes} = 0.843 \cdot \lg\left(\dfrac{\Psi}{0.065}\right)$

Formkorrekturfaktor: $k_{\Psi.Stokes} := 0.843 \cdot \log\left(\dfrac{\Psi}{0.065}\right)$ $\quad k_{\Psi.Stokes} = 0.900$

v_S für vol.-gleiche Kugeln: $v_{S.K.T} := \dfrac{v_{S.P.T}}{k_{\Psi.Stokes}}$ $\quad v_{S.K.T} = 54.5 \cdot \dfrac{mm}{s}$

Kontrolle der Lj-Zahl: $Lj := \dfrac{\rho_L^2 \cdot v_{S.K.T}^3}{a_Z \cdot (\rho_P - \rho_L) \cdot \eta_L}$ $\quad Lj = 0.014$

d.h. Stokes-Bereich (Lj<0.017): $v_{S.K.T} = \dfrac{a_Z \cdot \Delta\rho}{18 \cdot \eta_L} \cdot x_T^2$

vol.-äq. Durchmesser: $x_T := \sqrt{\dfrac{18 \cdot \eta_L \cdot v_{S.K.T}}{a_Z \cdot (\rho_P - \rho_L)}}$ $\quad x_T = 8.24 \cdot \mu m$

4. Trenngrad für doppelte Trennteilchengröße nach Anzapfmodell

Partikelgröße: $x := 2 \cdot x_T$ $\quad x = 16.5 \cdot \mu m$

Archimedes-Zahl: $Ar := \dfrac{a_Z \cdot (\rho_P - \rho_L) \cdot \rho_L \cdot x^3}{\eta_L^2}$ $\quad Ar = 71.782$

Berechnung der Einzelpartikelsinkgeschwindigkeit für die volumengleichen Kugeln:

Koeffiz. des Potenzansatzes:

$$AB := \begin{cases} (1 \;\; 24) & \text{if } Ar \le 10 \\ (0.8 \;\; 27) & \text{if } 10 < Ar \le 325 \\ (0.6 \;\; 17) & \text{if } 325 < Ar \le 1.067 \cdot 10^4 \\ (0.4 \;\; 6.5) & \text{if } 1.067 \cdot 10^4 < Ar \le 2.23 \cdot 10^5 \\ (0 \;\; 0.4) & \text{if } 2.23 \cdot 10^5 < Ar \le 3 \cdot 10^9 \end{cases}$$

$AB = [\,0.8 \;\; 27\,]$

Einzelkugelsinkgeschw.:	$v_{S.K} := \frac{\eta_L}{\rho_L \cdot x} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{Ar}{AB_{0,1}}\right)^{\frac{1}{2-AB_{0,0}}}$	$v_{S.K} = 156.8 \frac{mm}{s}$
Formkorrektur:	$K_{\Psi} = K_{\Psi.Stokes}{}^{1-\beta} \cdot K_{\Psi.Newton}{}^{\beta}$	
mit:	$\beta := \left(1 + \sqrt{\frac{185.5}{Ar}}\right)^{-1}$	$\beta = 0.384$
und	$k_{\Psi.Newton} := \sqrt{\frac{1}{1 + 11.1 \cdot (1 - \Psi)}}$	$k_{\Psi.Newton} = 0.522$
das heißt:	$k_{\Psi} := k_{\Psi.Stokes}{}^{1-\beta} \cdot k_{\Psi.Newton}{}^{\beta}$	$k_{\Psi} = 0.731$
alternativ (n. Gumz): (historische Formelsammlung)	$k_{\Psi Ü} := 0.4 + 0.75 \cdot \Psi - 0.067 \cdot \log\left(\frac{4}{3} \cdot Ar\right)$	$k_{\Psi Ü} = 0.837$
Einzelpartikelsinkgeschw.:	$v_{S.P} := v_{S.K} \cdot k_{\Psi}$	$v_{S.P} = 114.6 \frac{mm}{s}$

Konzentrationskorrektur nach Richardson & Zaki:

Reynolds-Zahl des Partikels:	$Re_P := \frac{v_{S.P} \cdot \rho_L \cdot x}{\eta_L}$	$Re_P = 2.098$
Exponent des R-Z-Ansatzes:	$n_{RZ} := \begin{cases} 4.65 & \text{if } Re_P \le 0.2 \\ 4.35 \cdot Re_P{}^{-0.03} & \text{if } 0.2 < Re_P \le 1 \\ 4.45 \cdot Re_P{}^{-0.1} & \text{if } 1 < Re_P \le 500 \\ 2.39 & \text{if } 500 < Re_P \end{cases}$	$n_{RZ} = 4.132$
effektive Sinkgeschwindigkeit:	$v_{S.eff} := v_{S.P} \cdot (1 - \varphi_V)^{n_{RZ}}$	$v_{S.eff} = 92.7 \frac{mm}{s}$
Parameter des Konz.-profils:	$\alpha := \frac{v_{S.eff} \cdot h_{Kanal}}{D_t}$	$\alpha = 3.863$
Trenngrad nach Anzapfmodell:	$T_{AM} := \left(1 + \tau \cdot e^{-\alpha}\right)^{-1}$	$T_{AM} = 90.5\,\%$

5. Trenngrad für doppelte Trennteilchengröße nach Suspensionsteilungsmodell

Trenngrad für Suspensnsteilung: $T_{TM} = \dfrac{1-\exp\left(-\alpha\cdot\dfrac{h_{trüb}}{h_{kanal}}\right)}{1-\exp(-\alpha)}$

Verhältnis der Höhen: $V_h = \dfrac{h_{trüb}}{h_{kanal}} = \dfrac{VS_{trüb}}{VS_{kanal}} = \dfrac{VS_{Unterlauf}}{VS_{Oberlauf}+VS_{Unterlauf}} = \dfrac{1}{\tau+1}$

$V_h := \dfrac{1}{\tau+1}$ $\quad V_h = 0.167$

Trenngrad für Teilaufg. c): $T_{TM.c} := \dfrac{1-\exp\left(-\alpha_T\cdot V_h\right)}{1-\exp\left(-\alpha_T\right)}$ $\quad T_{TM.c} = 29.4\,\%$

Trenngrad für Teilaufg. d): $T_{TM.d} := \dfrac{1-\exp\left(-\alpha\cdot V_h\right)}{1-\exp(-\alpha)}$ $\quad T_{TM.d} = 48.5\,\%$

informativ: Mediantrenngrenze beim Suspensionsteilungsmodell

Mediantrenngrenze bei Teilung: $T\left(\alpha_{TT}\right) = \dfrac{1-\exp\left(-\dfrac{\alpha_{TT}}{\tau+1}\right)}{1-\exp\left(-\alpha_{TT}\right)} = \dfrac{1}{2}$

das heißt: $\alpha_{TT} := \left|\begin{array}{l} est \leftarrow \alpha_T \\ \text{wurzel}\left(\dfrac{1-\exp\left(-est\cdot V_h\right)}{1-\exp(-est)} - \dfrac{1}{2}, est\right)\end{array}\right.$ $\quad \alpha_{TT} = 4.052$

$v_{S.eff.TT} := \dfrac{\alpha_{TT}\cdot D_t}{h_{Kanal}}$ $\quad v_{S.eff.TT} = 97.3\,\dfrac{mm}{s}$

Der Klassierparameter (α) und die effektive Sinkgeschwindigkeit ähneln den Werten aus Teilaufgabe d) (5% Unterschied). Wir befinden uns im selben Strömungsregime, in dem gilt:

$A := 0.8$ sowie $v_S = x^{\frac{1+A}{2-A}}$ $\quad x = v_S^{\frac{2-A}{1+A}}$

Abschätzung: $x_{TT} := \left(\dfrac{v_{S.eff.TT}}{v_{S.eff}}\right)^{\frac{2-A}{1+A}}\cdot x$ $\quad x_{TT} = 17.0\,\mu m$

Vergleich mit Anzapfmodell: $\quad x_T = 8.2\,\mu m$

Das heißt, bei Suspensionsteilung unter Beibehaltung des Volumenstromverhältnisses ist die Trennteilchengröße zu gröberen Partikeln hin verschoben. Für ein gegebenes Partikelsystem wäre der Gesamtabscheidegrad i.d.R. deutlich geringer (Ausnahme: sehr feine Partikelsysteme mit dominanter Rückvermischung und sehr grobe Partikelsysteme mit dominanter Sedimentation).