Aufgabe 2:

Schreiben Sie die Rotationsmatrix für

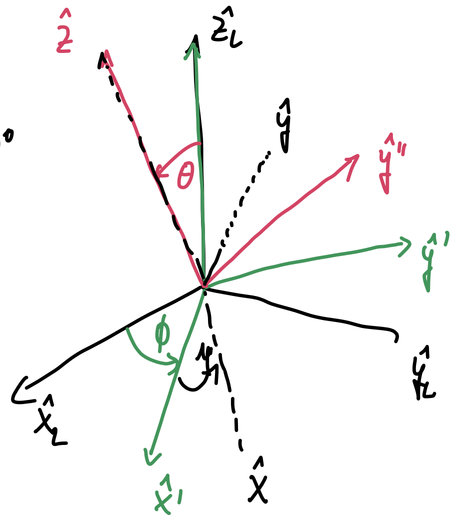
(a) eine 90° Drehung um die z-Achse.

(b) eine 90° Drehung um die y-Achse.

(c) eine 90° Drehung um die z-Achse und dann eine 90° Drehung um die ursprüngliche y-Achse.

(d) eine Drehung, so dass der Vektor $\vec{a} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ parallel (mit positivem Skalarprodukt) zur neuen z-Achse ist. Beachten Sie, dass diese Bedingung die Rotationsmatrix nicht eindeutig festlegt. Gefordert ist eine mögliche Lösung.

Eulerwinkel ϕ, θ, ψ



(a) Drehung um z-Achse um 90°

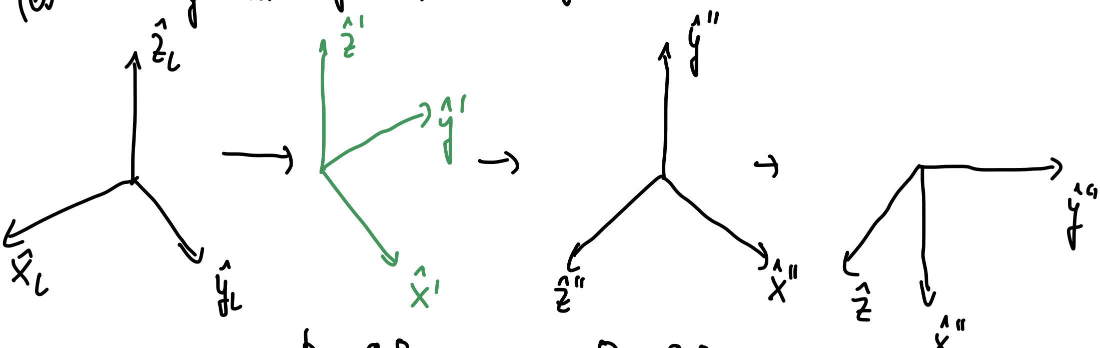
$\hat{=}\ \phi = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 0$

$\psi = 0$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

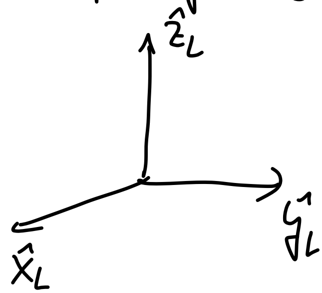
(b) Drehung um y-Achse um 90°



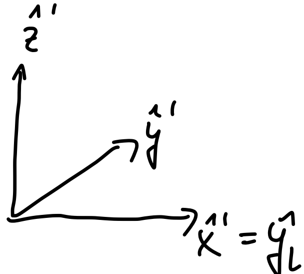
$\phi = 90°$ $\quad\theta = 90°$ $\quad\psi = -90°$

$$\overleftrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Drehung um $90°$ um z-Achse u. Drehung um urspr. y-Achse

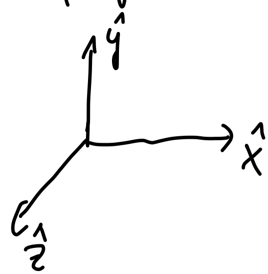


$\longrightarrow$



$\phi = 90°$

$\longrightarrow$



$\theta = 90°$

$\psi = 0°$

$$\Rightarrow \quad \overleftrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Finde Drehung so, dass $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ parallel zur neuen z-Achse ist.

Basiswechsel: gedrehte Basis $\vec{e}_i{}'$, alte Basis: $\vec{e}_i$

Zusammenhang:

$$\vec{e}_j{}' = \alpha_{ji} \, \vec{e}_i$$

$$\stackrel{!}{=} \overleftrightarrow{R} \vec{e}_j$$

$$= R_{ij} \vec{e}_i \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{ji} = R_{ij} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{\alpha} = \overleftrightarrow{R}^T$$

Basiswechsel von $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_i' \vec{e}_i{}'$$

$$a_i' = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{a} = \vec{e}_i{}' \cdot (a_j \vec{e}_j)$$

$$= (\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j) \, a_j$$

$$= \left(R_{ki}(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j)\right) a_j$$

$$= R_{ji} \, a_j$$

$$\Rightarrow \quad (a_i') = \overleftrightarrow{R}^T (a_j)$$

bzw. $\boxed{\underline{a}' = \overleftrightarrow{R}^T \underline{a}}$ $\quad (*)$

neue Komponenten $\quad$ alte Komponenten

Wir haben

$$\vec{a} = \vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z} \quad \Rightarrow \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und suchen $\overleftrightarrow{R}$ so, dass

$$\vec{a} \overset{!}{=} a_{z'} \vec{e_{z'}}$$

Da $|\vec{e_{z'}}| = 1$, gilt $a_{z'} = \vec{a} \cdot \vec{e_{z'}} = |\vec{a}| = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \sqrt{3}\, \vec{e_{z'}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Mit (*): $$\overleftrightarrow{R}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(\Leftrightarrow)}{\overleftrightarrow{R}^T = \overleftrightarrow{R}^{-1}} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \overleftrightarrow{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \overset{\text{allg. } \overleftrightarrow{R}}{\downarrow}{=} \sqrt{3} \begin{pmatrix} \sin\phi \sin\theta \\ -\cos\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

die letzte Glg: $$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

erste Komponente: $$1 \overset{!}{=} \cancel{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}} \sin\phi$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

korrekte Lsg. ist $$\phi = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

ψ beliebig