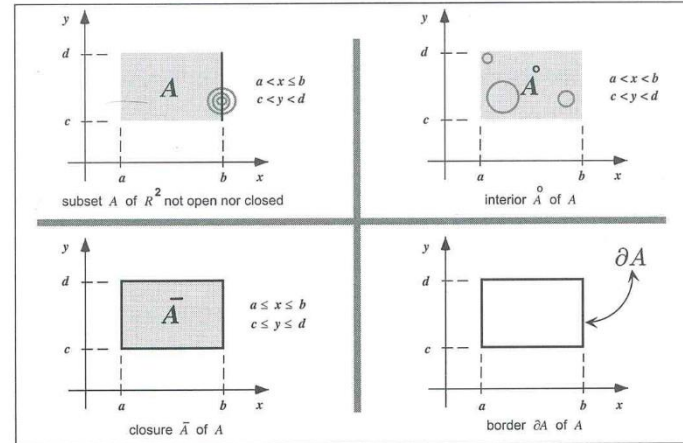
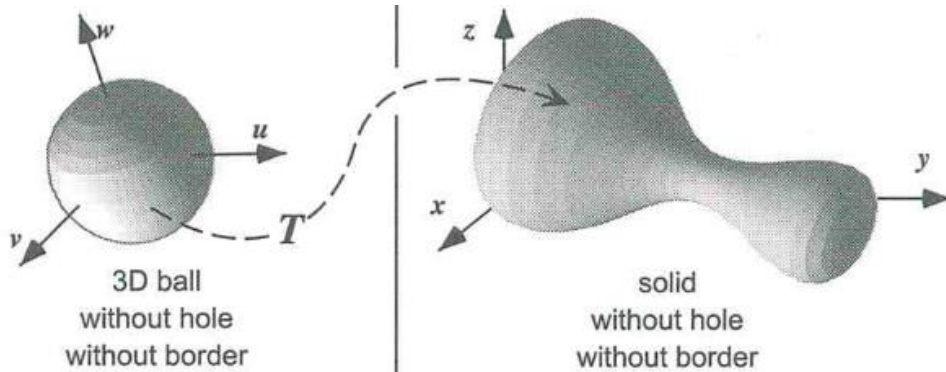


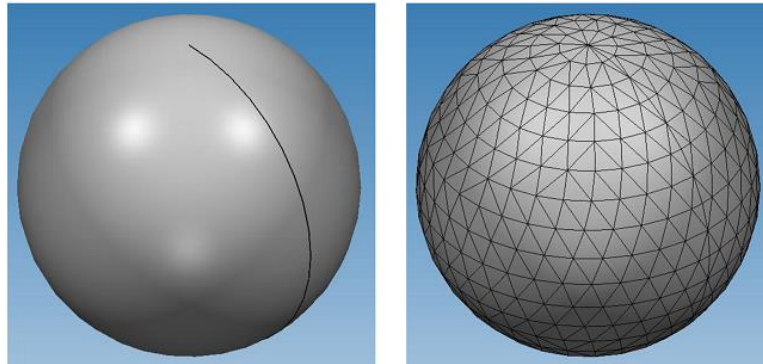
# 3D Geomodellierung

## 5. Topologie und zellulare Zerlegungen



## Vermaschung (engl. tessellation)

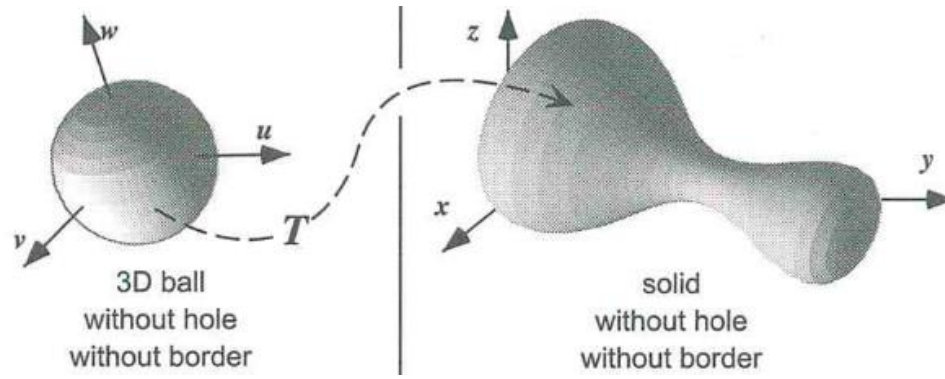
Im Bereich “computer aided geometric design” oder “computational geometry” bezieht sich der Terminus “Vermaschung” auf jedes beliebige Verfahren, um ein beliebiges  $n$ -dimensionales Objekt in eine Menge benachbarter polytopaler\*  $n$ -dimensionaler Zellen zu zerlegen.



# Zellen und zellulare Zerlegungen (cellular partitions)

Beschreibung der Repräsentation von finiten und diskreten Objekten über die Topologie der Einzelelemente.

Jede  $n$ -Zelle des Objektes trägt Informationen und kann topologisch in einen s.g.  $n$ -ball überführt werden.



# Exkurs: Mengenoperationen

- **Leere Menge**

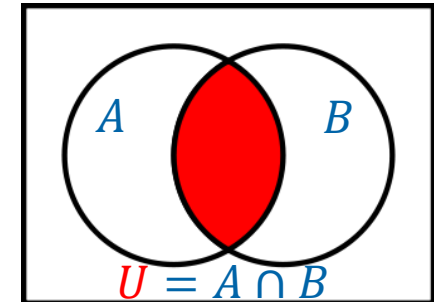
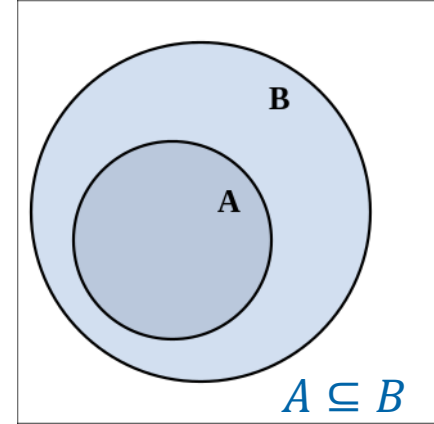
$$A = \{\} \text{ oder } \emptyset: \forall x(x \notin A)$$

- **Teilmenge/Untermenge**

$$A \subseteq B: \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

- **Schnittmenge**

$$U = A \cap B: \forall x(x \in U \rightarrow x \in A \text{ und } x \in B)$$



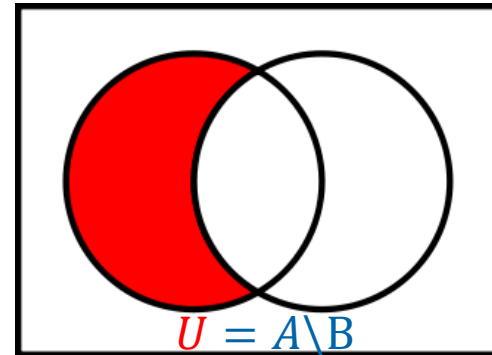
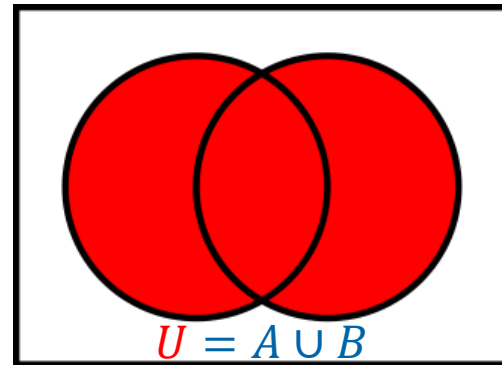
# Exkurs: Mengenoperationen

- **Vereinigung**

$$U = A \cup B: \forall x(x \in U \rightarrow x \in A \text{ oder } x \in B)$$

- **Differenz oder Komplement**

$$U = A \setminus B: \forall x(x \in U \rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B)$$



# Balls und Spheres

$\|\circ\|$  → klassische Euklidische Norm im  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

- *Open n-ball*:  $B_\rho^\circ(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \rho\}$  (offener  $n$ -Ball)
- *Closed n-ball*:  $\overline{B}_\rho^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \rho\}$  (geschlossener  $n$ -Ball)
- *n-sphere*:  $\partial B_\rho^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = \rho\}$  ( $n$ -Kugel)
  
- $\overline{B}_\rho^n(x_0) = B_\rho^\circ(x_0) \cup \partial B_\rho^n(x_0)$ 
  - $B_\rho^\circ(x_0)$  ist das „Innere“ (interior) von  $\overline{B}_\rho^n(x_0)$
  - $\partial B_\rho^n(x_0)$  ist die „Grenze“ (boundary) von  $\overline{B}_\rho^n(x_0)$  und  $B_\rho^\circ(x_0)$

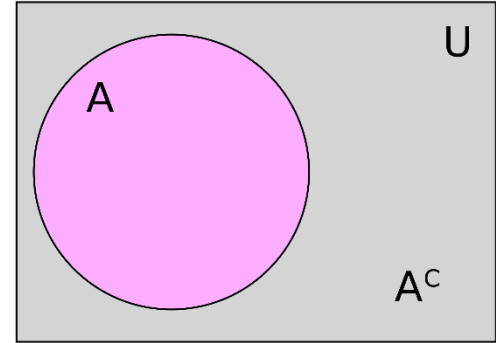
# Offene Mengen

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist **offen**, wenn für jedes Element  $x \in A$  ein offener  $n$ -Ball  $B_\rho^{\circ n}(x)$  existiert, für den gilt:  $B_\rho^{\circ n}(x) \subset A$ .

Die Mengenfamilie  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  aller offener Mengen erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $\mathbb{R}^n$  und  $\emptyset$  sind offen
2. Jede Vereinigung ( $\cup$ ) offener Mengen ist offen
3. Jede finite Schnittmenge ( $\cap$ ) offener Mengen ist offen

# Geschlossene Mengen



Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist **geschlossen**, wenn sie das Komplement einer offenen Menge  $A^c$  ist:  $A = \mathbb{R}^n \setminus A^c$ .

Die Mengenfamilie  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  aller geschlossenen Mengen im  $\mathbb{R}^n$  erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $\mathbb{R}^n$  und  $\emptyset$  sind offen
2. Jede endliche Vereinigung geschlossener Mengen ist geschlossen
3. Jede Schnittmenge geschlossener Mengen ist geschlossen

# Abschluss (closure), Inneres und Grenze einer Menge

Das Innere (interior) einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert durch die Vereinigung aller offenen Mengen, die in  $A$  enthalten sind

$$A^\circ := \bigcup_{B \subseteq A, B \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)} B$$

$\Rightarrow A^\circ$  ist die „größte“ offene Menge, welche in  $A$  enthalten ist.

# Abschluss (closure), Inneres und Grenze einer Menge

Das Abschluss (closure) einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert durch die Schnittmenge aller geschlossenen Mengen, welche die Menge  $A$  enthalten

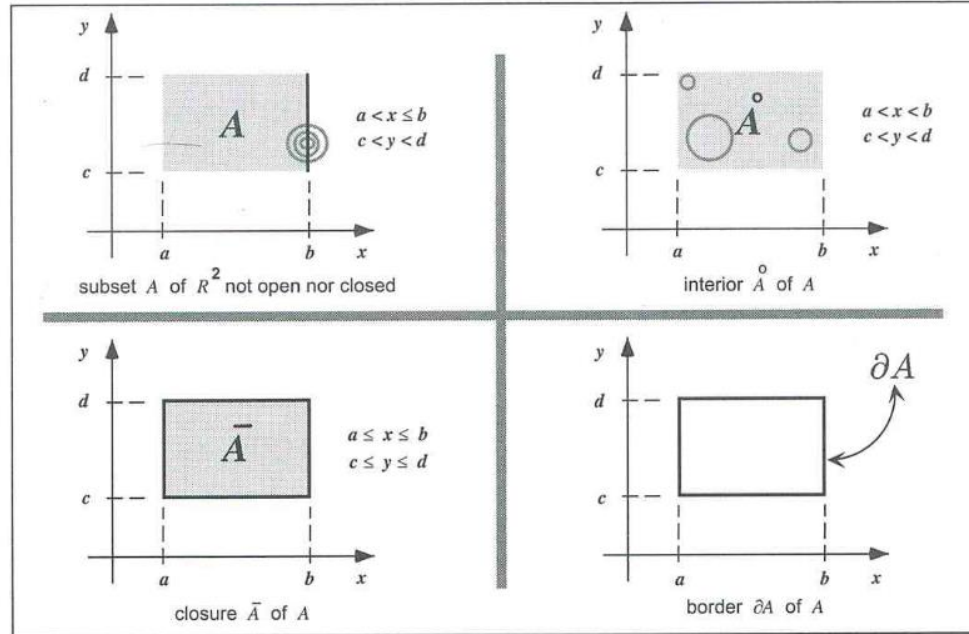
$$\bar{A} := \bigcap_{B \supseteq A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)} B$$

$\Rightarrow \bar{A}$  ist die „kleinste“ geschlossene Menge, welche  $A$  enthält.

Die Grenze  $\partial A$  ist die Differenz des Abschlusses mit dem Inneren von  $A$ .

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$$

# Abschluss (closure), Inneres und Grenze einer Menge



**Figure 2.3** An example of a set  $A$  of  $\mathbb{R}^2$ , its interior  $\overset{\circ}{A}$ , its closure  $\bar{A}$ , and its boundary  $\partial A$ .

# Topologische Räume

Gegeben sind die Menge  $E$  und  $\mathcal{O}(E)$  als Familie aller Teilmengen von  $E$  mit

1.  $E$  und  $\emptyset$  sind Elemente von  $\mathcal{O}(E)$
2. Jede Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{O}(E)$  ist selbst ein Element von  $\mathcal{O}(E)$
3. Jede finite Schnittmenge von Elementen aus  $\mathcal{O}(E)$  ist selbst ein Element von  $\mathcal{O}(E)$

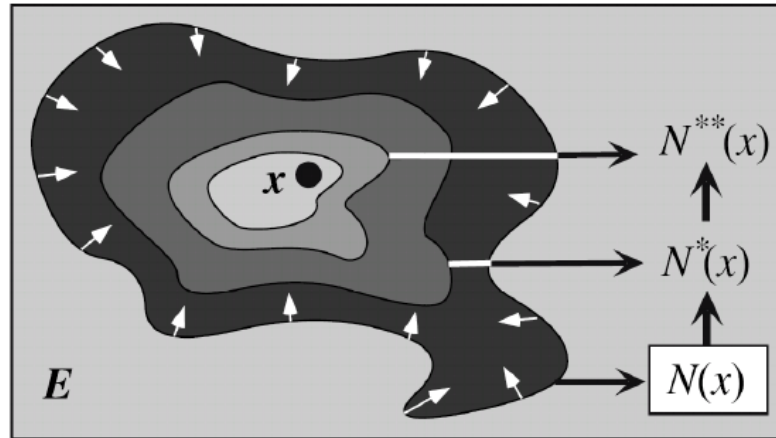
- Das Tupel  $(E, \mathcal{O}(E))$  wird als *topologische Raum* bezeichnet.
- Ein Element von  $E$  wird als *Punkt in  $E$*  bezeichnet.
- Ein Element aus  $\mathcal{O}(E)$  wird als *offene Teilmenge* von  $E$  bezeichnet.
- Jeder Teil von  $E$ , der das Komplement einer offenen Teilmenge von  $E$  ist, wird als *geschlossene Teilmenge* von  $E$  bezeichnet.  
 $E$  und  $\emptyset$  sind geschlossene Teilmengen.

# Topologische Räume

- Das Innere  $A^\circ$  einer Teilmenge  $A \subset E$  ist definiert als die Vereinigung aller offenen Teilmengen die in  $A$  enthalten sind.
- Der Abschluss  $\bar{A}$  einer Teilmenge  $A \subset E$  ist definiert als Schnittmenge aller geschlossenen Teilmengen die  $A$  enthalten.
- Die Grenze  $\partial A$  einer Teilmenge  $A \subset E$  ist definiert als die Mengendifferenz (Komplement)  $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ .

## Topologische Nachbarschaft

$(E, \mathcal{O}(E))$  sein ein topologischer Raum. Für jeden Punkt  $x \in E$  wird jede offene Teilmenge  $N(x) \subset E, N(x) \in \mathcal{O}(E)$  mit  $x \in N(x)$  als Nachbarschaft von  $x$  bezeichnet.



**Figure 2.4** Neighborhood  $N(x)$  viewed as a “continuously shrinkable” subset of the point set  $E$ . Note that the point  $x$  belongs to the interior of all its neighborhoods.

## Topologische Transformation / Mapping

$(E, \mathcal{O}(E))$  und  $(F, \mathcal{O}(F))$  seien topologische Räume und sei  $D$  eine Teilmenge  $D \subseteq E$  von  $E$ .

Eine Vorschrift  $T$ , die zu jedem  $x \in D$  ein eindeutiges Element  $y \in F$  zuordnet, wird als *Transformation* oder *Mapping* von  $E$  nach  $F$  mit der Domain  $D$  bezeichnet.

$$x \in D \mapsto y = T(x) \in F$$

Das Abbild  $T(D)$  von  $D$  durch  $T$  ist definiert durch

$$T(D) = \{y \in F \mid \exists x \in D, y = T(x)\}$$

## Topologische Transformation / Mapping

Die Transformation  $T$  wird als eindeutig / „eins-zu-eins“ („one-to-one“) bezeichnet,  
Wenn für jedes  $y \in T(D)$  ein eindeutiges Element  $x \in D$  existiert mit  $T(x) = y$ .

Ist eine Transformation  $T$  eindeutig, dann existiert ihre Inverse  $T^{-1}$ ,  
eindeutig definiert über

$$y \in T(D) \mapsto x = T^{-1}(y) \in D: T(x) = y$$

# Kontinuierliche Transformation

Euklidischer Fall:

Eine Transformation  $T$  wird als *kontinuierlich (continuous) an  $x \in D$*  bezeichnet, falls Punkte, die sich beliebig nah am Punkt  $y = T(x)$  befinden, Abbilder von Punkten sind, die sich „ausreichend“ (*sufficient*) nah am Punkt  $x \in D$  befinden.

Die Transformation  $T: D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  ist *kontinuierlich an  $x \in D$* , wenn für jeden Wert  $\epsilon > 0$  ein Wert  $\delta(\epsilon) > 0$  existiert, so dass gilt

$$T(B_\delta^n(x)) \subset B_\epsilon^m(T(x))$$

Die Transformation  $T$  ist dann *kontinuierlich*, wenn sie *kontinuierlich an jedem Punkt  $x \in D$*  ist.

# Kontinuierliche Transformation

Allgemeiner Fall:

$(E, \mathcal{O}(E))$  und  $(F, \mathcal{O}(F))$  seien topologische Räume und sei  $T$  eine Transformation  $T: D \rightarrow F$ .

Eine Transformation  $T$  ist *kontinuierlich an*  $x \in D$ , wenn für jede Nachbarschaft  $N(T(x))$  von  $T(x) \in F$  eine Nachbarschaft  $N(x)$  von  $x \in D$  existiert mit

$$x' \in N(x) \implies T(x') \in N(T(x)).$$

Die Transformation  $T$  ist dann *kontinuierlich*, wenn sie *kontinuierlich an jedem* Punkt  $x \in D$  ist.

# Homeomorphismus (Homeomorphism)

Ist eine Transformation  $T: D \subset E \rightarrow F$  kontinuierlich und eindeutig, dann existiert die inverse Transformation  $T^{-1}$ . Ist diese ebenfalls kontinuierlich, wird  $T$  als *Homeomorphismus* (homeomorphism) bezeichnet.

Die Mengen  $D$  und  $T(D)$  sind dann *homeomorph* oder topologisch äquivalent.

Dann gilt:

- $y = T(x) \Leftrightarrow T(N(x))$  ist eine Nachbarschaft von  $y$  für alle  $N(x) \in \mathcal{N}(x)$
- $y = T(x) \Leftrightarrow T^{-1}(N(y))$  ist eine Nachbarschaft von  $x$  für alle  $N(y) \in \mathcal{N}(y)$

$\mathcal{N}$  ist jeweils die Familie aller Nachbarschaften.

## Lokale topologische Dimension

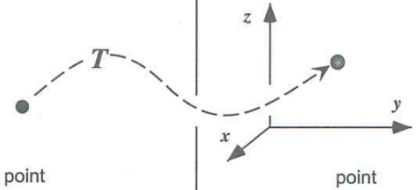
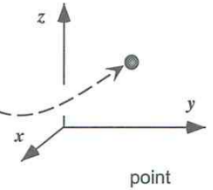
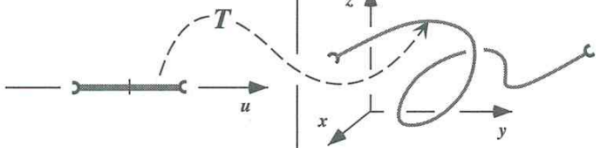
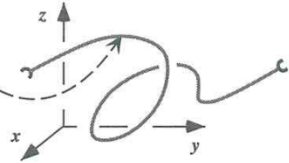
$(E, \mathcal{O}(E))$  sei ein topologischer Raum.

Die lokale topologische Dimension  $\dim(x)$  an jedem Punkt  $x \in A^\circ$  einer Untermenge  $A \subset E$  ist definiert als die *größte nicht-negative Ganzzahl  $n$* , so dass wenigstens eine Nachbarschaft  $N(x)$  mit  $N(x) \cap A$  topologisch äquivalent zu einem offenen  $n$ -Ball ist. Ist  $A$

- Ein isolierter Punkt:  $\dim(x) = 0$
- Eine Kurve:  $\dim(x) = 1 \forall x \in A^\circ$
- Eine Fläche:  $\dim(x) = 2 \forall x \in A^\circ$
- Ein Volumenelement:  $\dim(x) = 3 \forall x \in A^\circ$

$\dim(x)$  kann ebenso undefiniert sein, wenn sich keine Nachbarschaft findet, die topologisch äquivalent zu einem offenen Ball ist.

# Lokale topologische Dimension

$n$	open $n$ -balls $B_p^n(u_0)$	$n$ -cells in $\mathbb{R}^3$
0	 <p>point</p>	 <p>point</p>
1	 <p>1D interval without hole without border</p>	 <p>curve without hole without border</p>

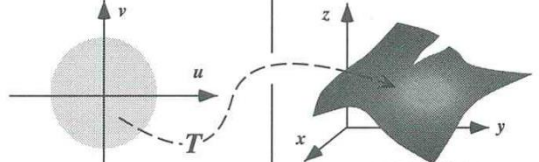
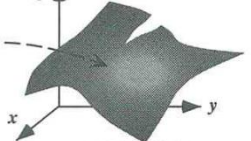
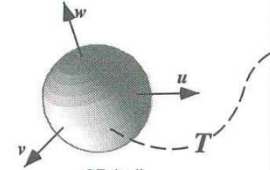
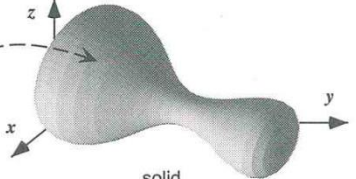
2	 <p>2D disc without hole without border</p>	 <p>open surface without hole without border</p>
3	 <p>3D ball without hole without border</p>	 <p>solid without hole without border</p>

Figure 2.5  $n$ -cells embedded in  $\mathbb{R}^3$  are homeomorphic to open  $n$ -balls.

## Topologische Objekte

Sein  $(E, \mathcal{O}(E))$  ein topologischer Raum, so dass für jedes Paar von unterschiedlichen Punkten  $x_1$  und  $x_2$  aus  $E$  Nachbarschaften  $N(x_1)$  und  $N(x_2)$  existieren mit

$$N(x_1) \cap N(x_2) = \emptyset$$

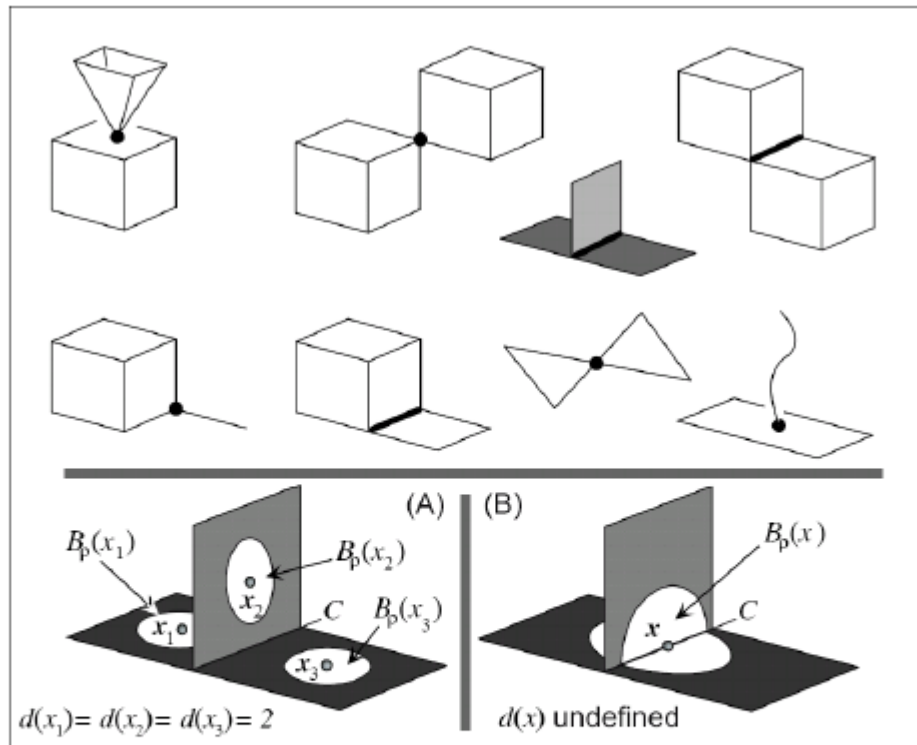
Ein solcher Raum wird als „Hausdorff“ Raum bezeichnet.

Eine **geschlossene** Teilmenge  $A \subset E$  wird als **Objekt, eingebettet (embedded) in  $E$** , bezeichnet.

## Topologische Objekte

Ein solches Objekt  $A$  wird als  *$n$ -manigfaltig* ( *$n$ -manifold*) bezeichnet, wenn seine lokale Dimension für jeden Punkt  $x \in A^\circ$  existiert **UND** konstant gleich  $n$  ist.  $n$  wird dann als Dimension von  $A$  bezeichnet.

Ein Objekt  $A$  ist *nicht-manigfaltig* (*non-manifold*) wenn die lokale Dimension in Teilen nicht existiert oder nicht konstant ist.



**Figure 2.5** Gallery of non-manifold objects embedded in  $\mathbb{R}^3$ : non-manifold topology occurs at bold points and bold lines. In Figure A, the points  $x_1$ ,  $x_2$  and  $x_3$  have a local dimension equal to 2. In Figure (B), non manifold topology arises at an internal point  $x$  where the topological dimension is undefined.

## Zellulare Zerlegungen (Cellular Partitions)

Zellulare Zerlegungen sind eine Möglichkeit, komplexe mannigfaltige Objekte in eine endliche Menge an elementaren Untermengen (so genannten Zellen) zu zerlegen.

Sie ermöglichen es, ein topologisches Modell zu erstellen, um beliebige Objekte im Computer zu repräsentieren.

# Zellulare Zerlegungen (Cellular Partitions)

Sei  $C$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .  $C$  wird als  $n$ -Zelle ( $n$ -cell), eingebettet im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet, wenn  $C$  homeomorph zu einem offenen  $n$ -Ball ist.

$n$	open $n$ -balls $B_p^n(u_0)$	$n$ -cells in $\mathbb{R}^3$
0	<p>point</p>	<p>point</p>
1	<p>1D interval without hole without border</p>	<p>curve without hole without border</p>

2	<p>2D disc without hole without border</p>	<p>open surface without hole without border</p>
3	<p>3D ball without hole without border</p>	<p>solid without hole without border</p>

Figure 2.5  $n$ -cells embedded in  $\mathbb{R}^3$  are homeomorphic to open  $n$ -balls.

# Zellulare Zerlegungen (Cellular Partitions)

In der Praxis:

- 0-Zelle: Vertex
- 1-Zelle: Kante
- 2-Zelle: Flächenstück
- 3-Zelle: Volumenkörper oder Volumenelement
- $m$ -Zelle:  $m$ -Hypervolumen mit  $m > 3$

## Zellulare Zerlegungen (Cellular Partitions)

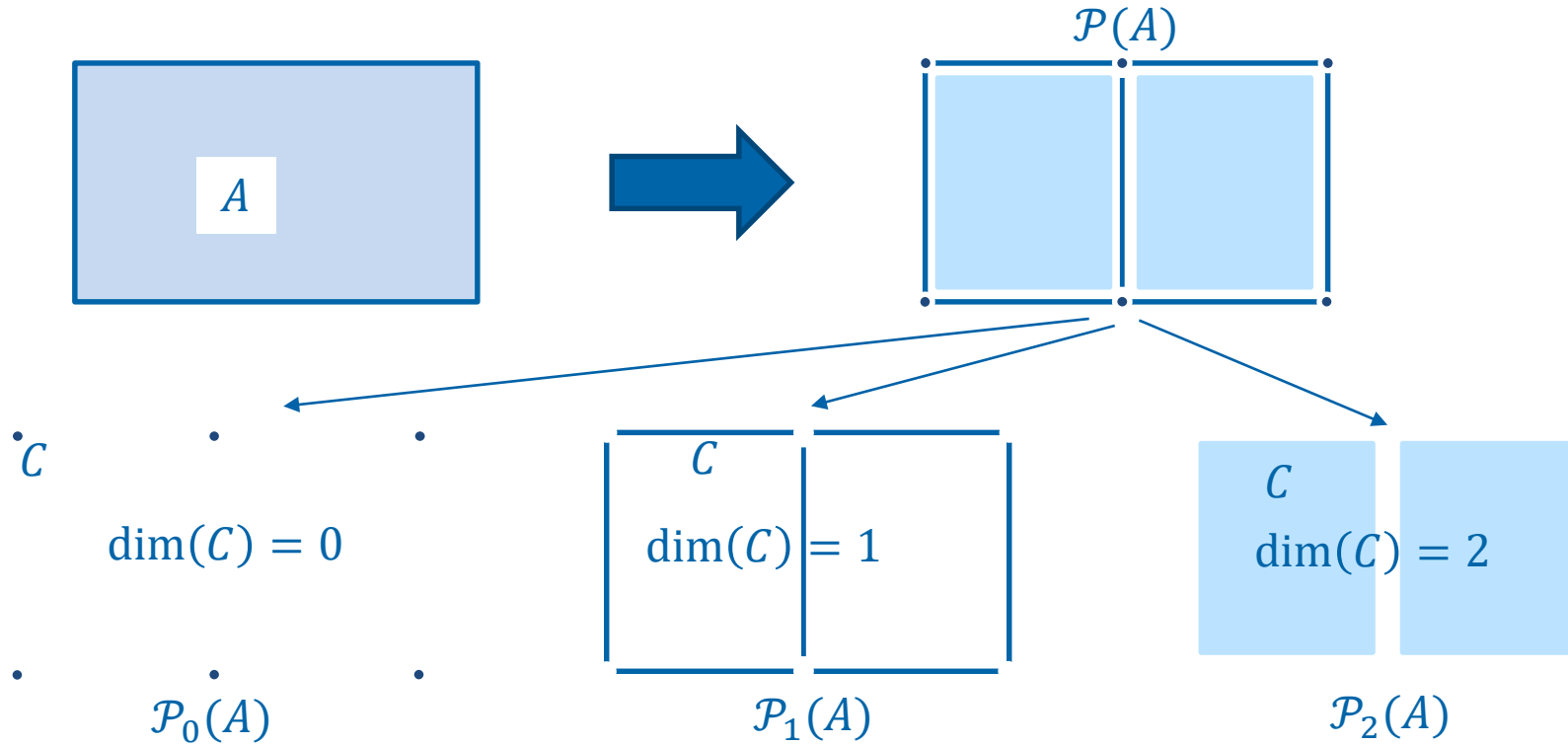
Sei  $A$  ein manigfaltiges Objekt eingebettet im  $\mathbb{R}^m$ .

Jede Familie  $\mathcal{P}(A)$  bestehend aus einer endlichen Menge an nicht-überlappenden Zellen ebenfalls eingebettet im  $\mathbb{R}^m$ , die eine Zerlegung von  $A$  darstellt, wird als zellulare Zerlegung von  $A$  bezeichnet, wenn folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $C \in \mathcal{P}(A)$  und  $\dim(C) > 0$  dann  $\dim(\partial C) = \dim(C) - 1$
2. Die Grenze jeder 1-Zelle aus  $\mathcal{P}(A)$  besteht aus 2 verschiedenen Vertices

$\mathcal{P}_n(A)$  ist definiert als die Familie von Untermengen von  $A$  bestehend aus allen  $n$ -Zellen aus  $\mathcal{P}(A)$ .

# Zellulare Zerlegungen (Cellular Partitions)



## Inzidenz (Incidence) und Adjazenz (Adjacency)

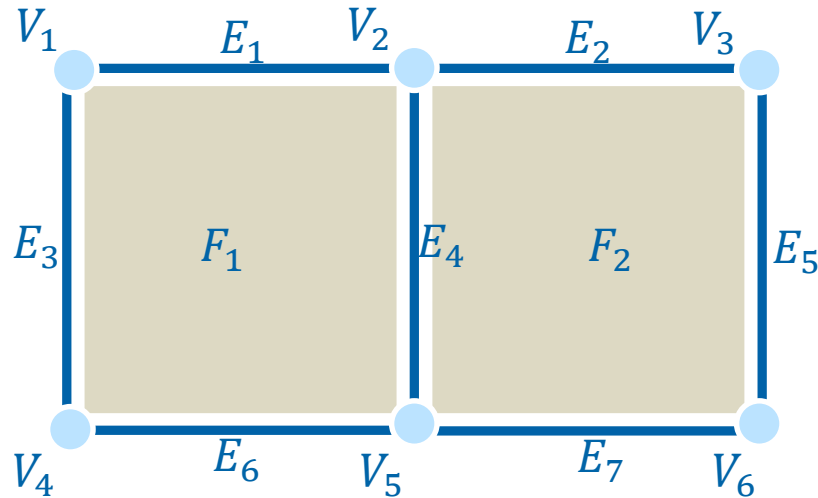
Zwei Zellen  $C_1$  und  $C_2 \in \mathcal{P}(A)$  sind **inzident**, wenn gilt:  $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$ .

Zwei Zellen  $C_1$  und  $C_2 \in \mathcal{P}(A)$  sind **adjazent**, wenn sie

- a. inzident sind und
- b. die gleiche topologische Dimension haben.

Aus bekannten Inzidenz-Beziehungen lassen sich alle Adjazenz-Beziehungen herleiten. Inzidenz und Adjazenz sind **duale Beziehungen**.

## Inzidenz (Incidence) und Adjazenz (Adjacency)



$F_1$  ist adjazent zu  $F_2$ .

$F_1$  und  $F_2$  sind inzident zu  $E_4$ .

$$\partial F_1 = (E_1, E_3, E_4, E_6), \partial F_2 = (E_2, E_4, E_5, E_7),$$

$$\partial E_1 = (V_1, V_2), \dots$$

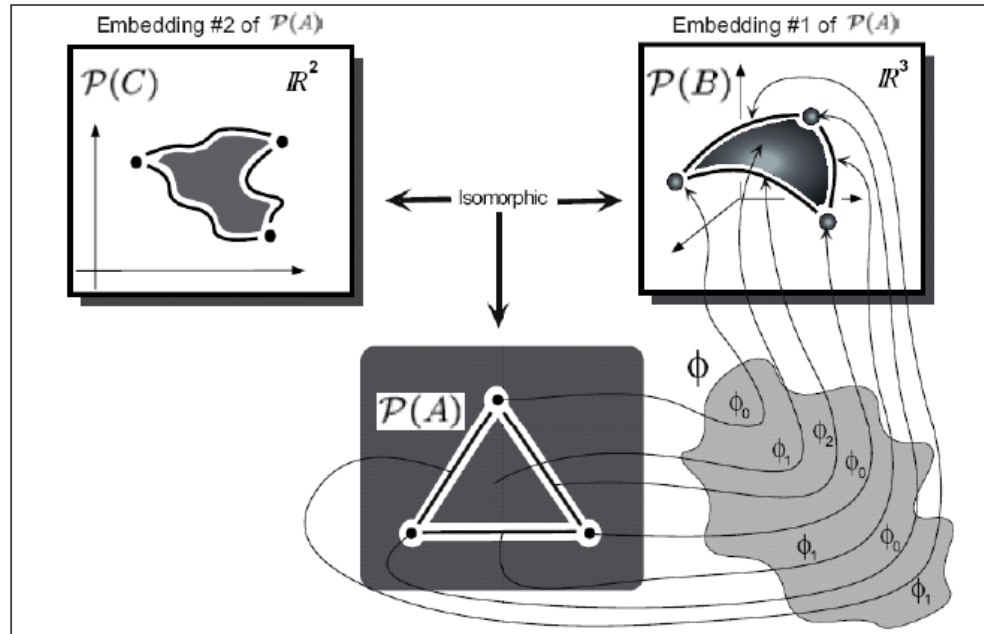
# Isomorphismus

Seien  $A$  und  $B$  zwei  $n$ -manigfaltige Objekte mit zellularen Zerlegungen  $\mathcal{P}(A)$  und  $\mathcal{P}(B)$ .  $\mathcal{P}(A)$  und  $\mathcal{P}(B)$  sind  $\phi$ -isomorph, wenn Folgendes gilt:

1. Die Anzahl von Zellen in  $\mathcal{P}_i(A)$  und  $\mathcal{P}_i(B)$  ist gleich  $\forall i = 0, 1, \dots, n$  und
2. Es gibt eine Sequenz von  $n + 1$  Transformationen  $\phi = \{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  mit
  1.  $\phi_i$  ist eine Bijektion zwischen  $\mathcal{P}_i(A)$  und  $\mathcal{P}_i(B)$ , die jeder  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  eine eindeutige  $i$ -Zelle  $b \in \mathcal{P}_i(B)$  zuordnet und umgekehrt, sowie
  2. Im Fall  $i > 0$ : Für jede  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  und jede ihrer inzidenten  $(i-1)$ -Zellen  $a' \in \mathcal{P}_{i-1}(A)$  erhalten die Bijektionen  $\phi_i$  und  $\phi_{i-1}$  die Inzidenz-Beziehungen.

Dann ist  $\phi$  ein s. g. *Isomorphismus* zwischen  $\mathcal{P}(A)$  und  $\mathcal{P}(B)$ .

# Isomorphismus



**Figure 2.11** Examples of isomorphic cellular partitions  $\mathcal{P}(A)$  and  $\mathcal{P}(B)$ : cells of these two isomorphic partitions are associated pairwise by an embedding  $\phi$  preserving the incidence relationships. It can be observed that isomorphisms can also<sup>33</sup> be defined from  $\mathcal{P}(A)$  to  $\mathcal{P}(C)$  and from  $\mathcal{P}(B)$  to  $\mathcal{P}(C)$ .

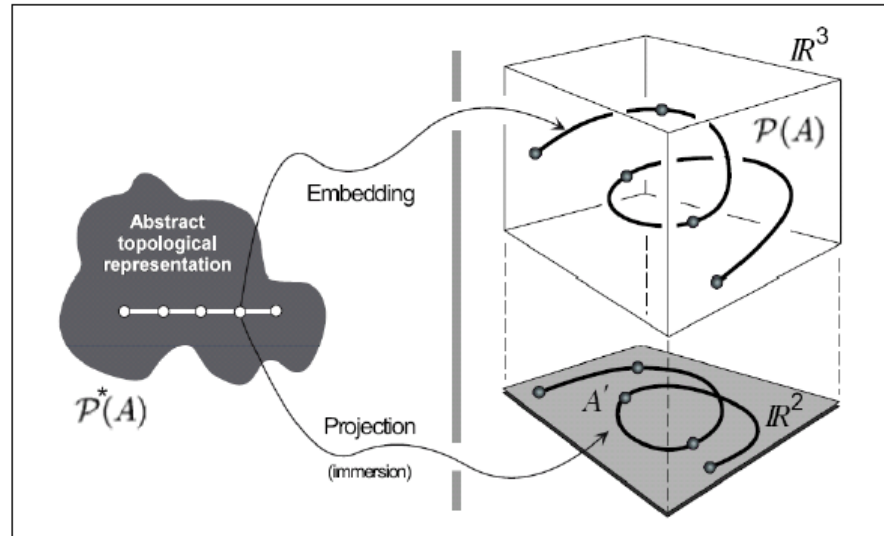
## Einbettung (Embedding)

Sei  $\mathcal{P}(A)$  eine zellulare Zerlegung  $\phi$ -isomorph zu einer Zerlegung  $\mathcal{P}(B)$ , dabei wird  $B$  als Teilmenge von  $E = \mathbb{R}^m$  angenommen:

- $E$  wird als Einbettungsraum (embedding space) von  $\mathcal{P}(A)$  durch  $\phi$  bezeichnet,
- $\phi$  wird als Einbettung von  $\mathcal{P}(A)$  im Einbettungsraum  $E$  bezeichnet,
- Eine Abbildung  $b = \phi_i(a)$  jeder  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  wird als Einbettung von  $a$  in  $E$  bezeichnet.

Eine solche Einbettung ist **nicht eindeutig**.

# Einbettung (Embedding)



**Figure 2.12** Depending on the dimension of the embedding space, a topological object may or may not “geometrically” self-intersect. However, from the topological point of view, such a geometrical intersection is not to be considered as such.

## Abstrakte topologische Repräsentation von $\mathcal{P}(A)$

Ein Isomorphismus zwischen zwei zellularen Zerlegungen liegt vor, wenn

1. Die Anzahl von Zellen in  $\mathcal{P}_i(A)$  und  $\mathcal{P}_i(B)$  ist gleich  $\forall i = 0, 1, \dots, n$
2.  $\phi_i$  ist eine Bijektion zwischen  $\mathcal{P}_i(A)$  und  $\mathcal{P}_i(B)$ , die jeder  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  eine eindeutige  $i$ -Zelle  $b \in \mathcal{P}_i(B)$  zuordnet und umgekehrt, mit

$$a \in \mathcal{P}_i(A) \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(a) = b \in \mathcal{P}_i(B)$$

$$b \in \mathcal{P}_i(B) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \phi_i^{-1}(b) = a \in \mathcal{P}_i(A)$$

3. Im Fall  $i > 0$ : Für jede  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  und jede ihrer inzidenten  $(i-1)$ -Zellen  $a' \in \mathcal{P}_{i-1}(A)$  erhalten die Bijektionen  $\phi_i$  und  $\phi_{i-1}$  die Inzidenz-Beziehungen:

$$a' \subset \partial a \Leftrightarrow \phi_{i-1}(a') \subset \partial \phi_i(a)$$

## Abstrakte topologische Repräsentation von $\mathcal{P}(A)$

Die Bedingungen für einen Isomorphismus sind ausschließlich kombinatorischer Natur.

- Keinerlei Bezug zu „geometrischen Eigenschaften“ (z.B. äußere Form der Zellen oder Dimension des Einbettungsraumes)

⇒ Aus der Beschreibung eines lässt sich folgendes Konzept zur topologischen Modellierung jedes manigfaltigen Objektes  $A$  mit einer gegebenen Zerlegung  $\mathcal{P}(A)$  herleiten ...

## Abstrakte topologische Repräsentation von $\mathcal{P}(A)$

...

- Jeder  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  wird ein beliebiges, aber eindeutiges Element  $a^*$  zugeordnet.  $a^*$  ist eine „abstrakte  $i$ -Zelle“ und  $Q_i(A)$  ist die Vereinigungsmenge aller dieser abstrakten  $i$ -Zellen.
- Die Menge  $Q(A)$  ist die Vereinigungsmenge aller  $Q_i(A)$  mit

$$Q(A) = \bigcup_i Q_i(A)$$

- Definiere eine Familie von Operationen/Regeln „*Inzidenzen*“ (*Incidencies*) auf  $Q(A)$ , welche die Inzidenz Bedingungen (siehe Punkt 3) für  $\mathcal{P}(A)$  abbilden.

3. Im Fall  $i > 0$ : Für jede  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  und jede ihrer inzidenten  $(i-1)$ -Zellen  $a' \in \mathcal{P}_{i-1}(A)$  erhalten die Bijektionen  $\phi_i$  und  $\phi_{i-1}$  die Inzidenz-Beziehungen:  
 $a' \subset \partial a \Leftrightarrow \phi_{i-1}(a') \subset \partial \phi_i(a)$

## Abstrakte topologische Repräsentation von $\mathcal{P}(A)$

Unabhängig davon, welches Modell  $(Q(A), \text{Inzidenzen})$  gewählt wird, es wird die topologischen Informationen für  $\mathcal{P}(A)$  erhalten.

$(Q(A), \text{Inzidenzen})$  wird deshalb auch als „abstrakte topologische Repräsentation“ von  $\mathcal{P}(A)$  bezeichnet.

Oder ...

Wenn  $A$  ein  $n$ -dimensionales Objekt ist, dass zu einem Einbettungsraum  $E = \mathbb{R}^m$  gehört, dann kann man sich  $\mathcal{P}(A)$  als eine „geometrische Realisierung“\* mittels einer Sequenz von  $n + 1$  Transformationen  $\phi = \{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  vorstellen, welche folgende Bedingungen erfüllen:

## Abstrakte topologische Repräsentation von $\mathcal{P}(A)$

1.  $\phi_i$  ist eine Bijektion zwischen  $\mathcal{Q}_i(A)$  und  $\mathcal{P}_i(A)$ , die jeder abstrakten  $i$ -Zelle  $a^* \in \mathcal{Q}_i(A)$  eine einzelne „reale“  $i$ -Zelle  $a \in \mathcal{P}_i(A)$  zuordnet und umgekehrt, mit

$$a^* \in \mathcal{Q}_i(A) \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(a^*) = a \in \mathcal{P}_i(A)$$

$$a \in \mathcal{P}_i(A) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \phi_i^{-1}(a) = a^* \in \mathcal{Q}_i(A)$$

2. Im Fall  $i > 0$ : Für jede  $i$ -Zelle  $a^* \in \mathcal{Q}_i(A)$  und jede ihrer inzidenten  $(i-1)$ -Zellen  $a^{*'} \in \mathcal{Q}_{i-1}(A)$  erhalten die Bijektionen  $\phi_i$  und  $\phi_{i-1}$  die Inzidenz-Beziehungen:

$$a^* \text{ ist inzident zu } a^{*'} \Leftrightarrow \phi_i(a^*) \text{ ist inzident zu } \phi_{i-1}(a^{*'})$$

Zwischen zwei Kreuzungen  $A$  und  $B$  verläuft eine Straße  $S$ . Wenn man von  $A$  nach  $B$  fährt, befindet sich links eine Region mit Wald  $W$  und rechts eine Region mit Feldern  $F$ .

Der beschriebene Sachverhalt ist Teil eines Objektes  $O$ , welches durch die Zerlegung  $\mathcal{P}(O)$  repräsentiert wird. Welche Kenntnis von  $\mathcal{P}(O)$  erhalten Sie durch gegebene Beschreibung?

Wie könnten mögliche Einbettung im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  aussehen?



$$(A, B) \in \mathcal{P}_0(O)$$

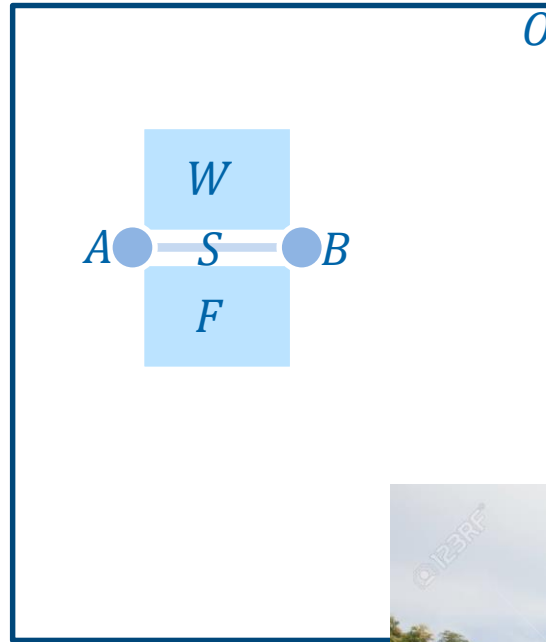
$$S \in \mathcal{P}_1(O)$$

$$\partial S = (A, B)$$

$$(W, F) \in \mathcal{P}_2(O)$$

$$S \in \partial W$$

$$S \in \partial F$$



Institut für Geophysik und Geoinformatik

Dr. Peter Menzel

Gustav-Zeuner-Str. 12

09599 Freiberg

Tel. +49(0)3731 39-3815