

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)
Sommersemester 2025

3. Übung: Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f(z) = f(x + iy)$ (auf dem maximalen Definitionsbereich betrachtet) unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Differenzierbarkeit. Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(z)$ nur unter Verwendung von z an.

- a) $f(z) = z^2$,
- b) $f(z) = |z|^2$,
- c) $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$,
- d) $f(z) = e^y(\sin x + i \cos x)$,
- e) $f(z) = \frac{1}{z}$,
- f) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

Aufgabe 2

Ist $u(x, y)$ eine harmonische Funktion? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine zugehörige konjugiert harmonische Funktion und das zugehörige komplexe Potential.

- a) $u(x, y) = x \sin y$,
- b) $u(x, y) = \cos x \sinh y$,
- c) $u(x, y) = -e^y \cos x$.

Aufgabe 3

Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Stellen Sie die Niveaulinien $u(x, y) = 0$ und $v(x, y) = 0$ graphisch dar. Berechnen Sie außerdem $f'(z)$.

- a) $f(z) = (1 + i)z$,
- b) $f(z) = z^2 - 1 - i$.

Z: Berechne die Tangentenvektoren

$$t_u = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad t_v = \left(-\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

und ihr Skalarprodukt $t_u \cdot t_v$. In welchem Verhältnis stehen t_u und t_v zueinander?