

Aufgabe Turbulenz-7 (turbulente Diffusion)

Prozesse des turbulenten Querstromklassierens (z. B. im Hydrozyklon) lassen sich näherungsweise mit dem Suspensionsteilungs- oder dem Anzapfmodell beschreiben. Erläutern Sie die Unterschiede in Bezug auf die Trennteilchengröße und die Trennschärfe!

Eine wässrige Suspension ($\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\eta_L = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, $\rho_S = 1300 \text{ kg/m}^3$, $c_{V,S} = 5 \text{ Vol.}\%$) soll mit Hilfe eines turbulent durchströmten Kanals ($h = 0,5 \text{ m}$) aufkonzentriert werden. Der turbulente Diffusionskoeffizient beträgt für die Strömung im vorgegebenen Kanal $0,0005 \text{ m}^2/\text{s}$. Berechnen Sie unter Annahme homogener isotroper Turbulenz für den Fall eines voll ausgebildeten Konzentrationsprofils:

- die Trennteilchengröße bei einer Suspensionsteilung in Höhe von 20 cm über dem Kanalboden,
- die Trennteilchengröße entsprechend Anzapfmodell bei gleichen Volumenstromverhältnissen wie in a),
- den Gesamtabseidegrad gemäß dem Suspensionsteilungsmodells, wenn mittels Siebanalyse folgende Partikelgrößenverteilung bestimmt wurde:

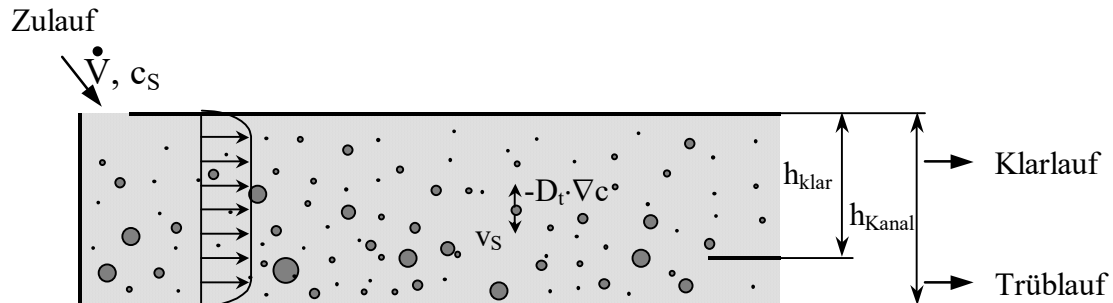
Maschenweite, μm :	0	32	50	71	100	125	160
Rückstand, Ma. %:	5	10	20	30	25	10	0

- die Konzentration im Trüblauf bei Suspensionsteilung!

Aufgabe Turbulenz-7 (turbulente Diffusion)

Definition: $\mu\text{m} := 10^{-6} \text{ m}$ $\text{Vol}\% := \%$

Skizze:



Vorgegebene Werte:

Abwasser: $c_{V,S} := 5 \text{ Vol}\%$

flüssige Phase: $\rho_L := 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $\eta_L := 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

disperse Phase: $\rho_S := 1300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $D_t := 0.0005 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Strömungskanal: $h_{\text{Kanal}} := 50 \text{ cm}$ $h_{\text{trüb}} := 20 \text{ cm}$

Vektor der Maschenweiten: $x_M := (0 \ 32 \ 50 \ 71 \ 100 \ 125 \ 160)^T \mu\text{m}$

Vektor der Rückstände: $\Delta Q_3 := (5 \ 10 \ 20 \ 30 \ 25 \ 10)^T \%$

Lösung:

1. Trennteilchengröße bei Suspensionsteilung

station. Konzentrationsprofil: $C(z, x) = C_0(x) \cdot e^{-\frac{v_S(x)}{D_t} \cdot z} = C_0(x) \cdot e^{-\alpha(x) \cdot \frac{z}{h}}$

mit $\alpha(x) = \frac{v_S(x) \cdot h_{\text{Kanal}}}{D_{\text{eff}}}$ für konz. Suspensionen muss die Einzelteilchensinkgeschw. $v_S(x)$ durch die effektive Sinkgeschwindigkeit $v_{S,\text{eff}}(x)$ ersetzt werden; für grobdisperse Systeme gilt: $D_{\text{eff}} = D_t$

Trennfunktion: $T(x) = \frac{C_{\text{trüb}}(x) \cdot v_{S_{\text{trüb}}}}{C(x) \cdot v_S} = \frac{\int_0^{h_{\text{trüb}}} C(x, z) dz}{\int_0^{h_{\text{Kanal}}} C(x, z) dz} = \frac{1 - e^{-\alpha(x) \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h}}}{1 - e^{-\alpha(x)}}$

Trennteilchengröße x_T : $T(x_T) = 50 \%$

alternative Herleitung: in Trüblauf ausgetragene Menge gleicht der in Klarlauf ausgetragenen Menge

bestimmende Gleichung: $0.5 \cdot \left(1 - e^{-\alpha_T}\right) = 1 - e^{-\alpha_T \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}}}$

Wichtig: keine analytische Lösung dieser Gleichung möglich!

Lösungsweg: Umwandeln in Nullstellenproblem & Nutzung geeigneter numerischer Verfahren

Nullstellenproblem: $F(\alpha) := 2 \cdot e^{-\alpha \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}}} - e^{-\alpha} - 1$ mit $F(\alpha_T) = 0$

nur iterative Lösung möglich, z.B. Newton-Verfahren, \Rightarrow Taschenrechner

NEWTON-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

Ableitung der NST-Funktion: $F'(\alpha) := -2 \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}} \cdot e^{-\alpha \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}}} + e^{-\alpha}$

Schätzung des Startwertes: $x_0 := 1$

Approximation: $n := 0 \dots 3$ $x_{n+1} := x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

Liste:	$n := 0$	$x_n = 1$	$F(x_n) = -0.027$	$F'(x_n) = -0.168$	$x_{n+1} = 0.838$
	$n := 1$	$x_n = 0.838$	$F(x_n) = -2.216 \cdot 10^{-3}$	$F'(x_n) = -0.14$	$x_{n+1} = 0.822$
	$n := 2$	$x_n = 0.822$	$F(x_n) = -2.587 \cdot 10^{-5}$	$F'(x_n) = -0.136$	$x_{n+1} = 0.822$
	$n := 3$	$x_n = 0.822$	$F(x_n) = -3.765 \cdot 10^{-9}$	$F'(x_n) = -0.136$	$x_{n+1} = 0.822$

Parameter α_T : $\alpha_T := x_4$

$\alpha_T = 0.822$

Bestimmung der Trennteilchengröße:

Zusammenhang zw. α_T & x_T : $\alpha_T = \frac{v_{S,\text{eff}}(x_T) \cdot h_{\text{Kanal}}}{D_t}$

eff. Sinkgeschwindigkeit von x_T : $v_{\text{Seff},T} := \frac{\alpha_T \cdot D_t}{h_{\text{Kanal}}}$ $v_{\text{Seff},T} = 0.82 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Ljascenko-Zahl für $v_{\text{Seff},T}$: $L_{j,\text{eff}} := \frac{\rho_L^2 \cdot v_{\text{Seff},T}^3}{g \cdot (\rho_S - \rho_L) \cdot \eta_L}$ $L_{j,\text{eff}} = 1.889 \cdot 10^{-4}$

Konzentrationskorrektur nach Richardson & Zaki: $v_{S,\text{eff}} = v_S \cdot (1 - c_{V,S})^n$ hier: $n = 4.65$ da Stokes, $L_j < 0.017$

korrigierte Sinkgeschwindigkeit: $v_{S,T} := \frac{v_{\text{Seff},T}}{(1 - c_{V,S})^{4.65}}$ $v_{S,T} = 1.04 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Trennteilchengröße (Stokes): $x_{T_TM} := \sqrt{\frac{18 \cdot \eta_L \cdot v_{S,T}}{g \cdot (\rho_S - \rho_L)}}$ $x_{T_TM} = 79.9 \mu\text{m}$

alternative Berechnung:

Ljaschenko-Zahl für $v_{\text{Seff},T}$: $L_j := \frac{\rho_L^2 \cdot v_{S,T}^3}{g \cdot (\rho_S - \rho_L) \cdot \eta_L}$ $L_j = 3.864 \cdot 10^{-4}$

Bestimmung von A & B:

$A := \begin{cases} 1 & \text{if } L_j < 0.017 \\ 0.8 & \text{if } 0.017 \leq L_j < 3.18 \\ 0.6 & \text{if } 3.18 \leq L_j < 172 \\ 0.4 & \text{if } 172 \leq L_j < 2542 \\ 0 & \text{if } 2542 \leq L_j < 3.3 \cdot 10^5 \end{cases}$	$B := \begin{cases} 24 & \text{if } L_j < 0.017 \\ 27 & \text{if } 0.017 \leq L_j < 3.18 \\ 17 & \text{if } 3.18 \leq L_j < 172 \\ 6.5 & \text{if } 172 \leq L_j < 2542 \\ 0.44 & \text{if } 2542 \leq L_j < 3.3 \cdot 10^5 \end{cases}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$A = 1$

$B = 24$

Trennteilchengröße: $x_T := \frac{\eta_L}{\rho_L \cdot v_{S,T}} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot B \cdot L_j \right)^{\frac{1}{1+A}}$ $x_T = 79.9 \mu\text{m}$

2. Trennteilchengröße bei Anzapfung mit gleichen Volumenströmen wie in a)

Die Trennfunktion ist definiert als Verhältnis von ausgetragener Grogutmenge zur Menge des Aufgabegutes. Da jedoch beide Mengenangaben auch unter Hinzuziehung der Feingutmenge erklärt werden können, existieren verschiedene Darstellungen der Trennfunktion. Zur Lösung der Teilaufgabe wird im Folgenden auf die in der Literatur übliche Bestimmungsgleichung für die $T(x)$ des Anzapfmodells zurückgegriffen. Eine alternative Möglichkeit wird am Ende der Lösung vorgestellt.

Anzapfmodell - Variante MVT LB:

Trennfunktion: $T(x) = \frac{C(x,0) \cdot VS_{\text{trüb}}}{C(x,0) \cdot VS_{\text{trüb}} + C(x,h_{\text{Kanal}}) \cdot VS_{\text{klar}}} = \frac{1}{1 + \frac{VS_{\text{klar}}}{VS_{\text{trüb}}} \cdot e^{-\alpha(x)}}$

Volumenströme wie in a): $T(x) = \frac{1}{1 + \frac{h_{\text{klar}}}{h_{\text{trüb}}} \cdot e^{-\alpha(x)}}$

für Trennteilchengröße x_T gilt: $T(x_T) = 50\% \quad \text{bzw.} \quad e^{-\alpha_T} = \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{klar}}} \Rightarrow T(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{h_{\text{klar}}}{h_{\text{trüb}}} \right)^{\frac{1 - \alpha(x)}{\alpha_T}}}$

Parameter α_T : $\alpha_T := -\ln\left(\frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}} - h_{\text{trüb}}}\right)$ $\alpha_T = 0.405$

eff. Sinkgeschwindigkeit von x_T : $v_{\text{Seff.T}} := \frac{\alpha_T \cdot D_t}{h_{\text{Kanal}}}$ $v_{\text{Seff.T}} = 0.41 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Konzentrationskorrektur: $v_{\text{S.T}} := \frac{v_{\text{Seff.T}}}{(1 - c_{\text{V.S}})^{4.65}}$ $v_{\text{S.T}} = 0.51 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Trennteilchengröße: $x_{\text{T_AM1}} := \sqrt{\frac{18 \cdot \eta_L \cdot v_{\text{S.T}}}{g \cdot (\rho_S - \rho_L)}}$ $x_{\text{T_AM1}} = 56.1 \mu\text{m}$

Hinweis: Der Berechnung lag die Annahme laminaren Sedimentierens zugrunde. Die ist gerechtfertigt, da die effektive Sinkgeschwindigkeit noch niedriger als beim Suspensionsteilungsmodell ist.

Vergleich der Ergebnisse:

Suspensionsteilungsmodell: $x_{\text{T_TM}} = 79.9 \mu\text{m}$

Anzapfmodell I: $x_{\text{T_AM1}} = 56.1 \mu\text{m}$

Erwartungsgemäß liegt die Trennteilchengröße bei Suspensionsteilung über den Werten für Suspensions- anzapfung (die Konzentrationsprofile im Kanal sind asymmetrisch: am Boden ist die Abweichung zur mittleren Konzentration größer als an der Kanaldecke).

3. Gesamtabscheidegrad

(zur Lösung empfiehlt sich ein programmierbarer Taschenrechner oder die Software für Tabellenkalkulation)

Gesamtabscheidegrad: $\eta_{\text{ges}} = \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} T(x) \cdot q_3(x) dx = \sum_{i=1}^n \eta_i \cdot \Delta Q_{3_i}$

Fraktionsabscheidegrad: $\eta_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} T(x) dx = T\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$

T(x) für Suspensionsteilung: $T(x) = \frac{1 - e^{-\alpha(x) \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}}}}{1 - e^{-\alpha(x)}}$ mit $\alpha(x) = \frac{v_{\text{S.eff}}(x) \cdot h_{\text{Kanal}}}{D_t}$

Vektor der mittleren PGen: $k := 0 \dots \text{länge}(x_M) - 2$ $x_{m_k} := \frac{x_{M_k} + x_{M_{k+1}}}{2}$

$x_m^T = [16 \quad 41 \quad 60.5 \quad 85.5 \quad 112.5 \quad 142.5] \mu\text{m}$

Ar-Zahl für größte PG: $Ar_{\text{max}} := \frac{g \cdot (\rho_S - \rho_L) \cdot \rho_L \cdot \max(x_m)^3}{\eta_L^2}$ $Ar_{\text{max}} = 8.513$

Das bedeutet, für alle Größenfraktionen darf Sedimentieren im Stokesregime ($Ar < 10$) angenommen werden.

Fraktionsweise Berechnung von v_S , α , η_i und $\eta_i \cdot \Delta Q_i$

Fraktionsindizierung: $i := 0 \dots \text{länge}(x_m) - 1$

eff. Sinkgeschwindigkeit:
$$v_{S,eff_i} := \frac{g \cdot (\rho_S - \rho_L)}{18 \cdot \eta_L \cdot (1 - c_{V,S})^{4.65}} \cdot (x_{m_i})^2$$

Parameter α :
$$\alpha_i := \frac{v_{S,eff_i} \cdot h_{\text{Kanal}}}{D_t}$$

Fraktionsabscheidung:
$$\eta_i := \frac{1 - e^{-\alpha_i \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}}}}{1 - e^{-\alpha_i}}$$

Fraktion	mittl. PG	$v_{S,eff}$	α	η	ΔQ	$\eta \cdot \Delta Q$
$i := 0$	$x_{m_i} = 16 \mu\text{m}$	$v_{S,eff_i} = 0.053 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\alpha_i = 0.053$	$\eta_i = 0.406$	$\Delta Q_{3_i} = 5 \%$	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3_i} = 2.0 \%$
$i := 1$	$x_{m_i} = 41 \mu\text{m}$	$v_{S,eff_i} = 0.349 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\alpha_i = 0.349$	$\eta_i = 0.442$	$\Delta Q_{3_i} = 10 \%$	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3_i} = 4.4 \%$
$i := 2$	$x_{m_i} = 60.5 \mu\text{m}$	$v_{S,eff_i} = 0.759 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\alpha_i = 0.759$	$\eta_i = 0.492$	$\Delta Q_{3_i} = 20 \%$	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3_i} = 9.8 \%$
$i := 3$	$x_{m_i} = 85.5 \mu\text{m}$	$v_{S,eff_i} = 1.517 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\alpha_i = 1.517$	$\eta_i = 0.583$	$\Delta Q_{3_i} = 30 \%$	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3_i} = 17.5 \%$
$i := 4$	$x_{m_i} = 112.5 \mu\text{m}$	$v_{S,eff_i} = 2.626 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\alpha_i = 2.626$	$\eta_i = 0.701$	$\Delta Q_{3_i} = 25 \%$	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3_i} = 17.5 \%$
$i := 5$	$x_{m_i} = 142.5 \mu\text{m}$	$v_{S,eff_i} = 4.213 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\alpha_i = 4.213$	$\eta_i = 0.827$	$\Delta Q_{3_i} = 10 \%$	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3_i} = 8.3 \%$

Gesamtabscheidegrad: $\eta_{ges} := \sum(\eta \cdot \Delta Q_3)$ $\eta_{ges} = 59.6 \%$

Darstellung mittels Tabellenkalkulation (Excel):

Klasse	Grenze	Mitte	Verteilung		fraktionelle Abscheidung			Effekt
			$\Delta Q_{3,i}$	$Q_{3,i}$	$v_{S,eff,i}$	α_i	η_i	$\eta_i \cdot \Delta Q_{3,i}$
-	μm	μm	%	%	mm/s	-	%	%
0	0							
1	32	16	5%	5%	0.053	0.053	40.6%	2.0%
2	50	41	10%	15%	0.349	0.349	44.2%	4.4%
3	71	60.5	20%	35%	0.760	0.760	49.2%	9.8%
4	100	85.5	30%	65%	1.517	1.517	58.3%	17.5%
5	125	112.5	25%	90%	2.627	2.627	70.1%	17.5%
6	160	142.5	10%	100%	4.214	4.214	82.7%	8.3%
Summe:								59.6%

4. Trüblaufkonzentration

abgeschiedene Feststoffmenge $c_{V, \text{trüb}} \cdot VS_{\text{trüb}} = \eta_{\text{ges}} \cdot c_{V, S} \cdot VS_{\text{ges}}$

Trüblaufkonzentration: $c_{V, \text{trüb}} := \eta_{\text{ges}} \cdot c_{V, S} \cdot \frac{h_{\text{Kanal}}}{h_{\text{trüb}}}$

$c_{V, \text{trüb}} = 7.45 \cdot \text{Vol}\%$

ZUSATZ (informativ)

Anzapfmodell - Variante II: aus Definitionsgleichung für T(x)

Trennfunktion: $T(x) = \frac{C(x, 0) \cdot VS_0}{C_{\text{ges}}(x) \cdot VS_{\text{ges}}} = \frac{\alpha(x)}{1 - e^{-\alpha(x)}} \cdot \frac{VS_0}{VS_{\text{ges}}}$

Volumenströme wie in a): $T(x) = \frac{\alpha(x)}{1 - e^{-\alpha(x)}} \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}}$

für Trennteilchengröße x_T gilt: $T(x_T) = 50\%$ bzw. $1 - e^{-\alpha_T} = 2 \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}} \cdot \alpha_T$

Hinweis: Wie in Teilaufgabe a) ist der Parameter α_T nur numerisch (iterativ) berechenbar.

Nullstellenproblem: $F(\alpha) := 2 \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}} \cdot \alpha + e^{-\alpha} - 1$

Ableitung der NST-Funktion: $F'(\alpha) := 2 \cdot \frac{h_{\text{trüb}}}{h_{\text{Kanal}}} - e^{-\alpha}$

NEWTON-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

Schätzung des Startwertes: $x_0 := 1$

Approximation: $n := 0 \dots 3$ $x_{n+1} := x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

Liste:	$n := 0$	$x_n = 1$	$F(x_n) = 0.168$	$F'(x_n) = 0.432$	$x_{n+1} = 0.611$
	$n := 1$	$x_n = 0.611$	$F(x_n) = 0.032$	$F'(x_n) = 0.257$	$x_{n+1} = 0.488$
	$n := 2$	$x_n = 0.488$	$F(x_n) = 4.296 \cdot 10^{-3}$	$F'(x_n) = 0.186$	$x_{n+1} = 0.465$
	$n := 3$	$x_n = 0.465$	$F(x_n) = 1.645 \cdot 10^{-4}$	$F'(x_n) = 0.172$	$x_{n+1} = 0.464$

Parameter α_T : $\alpha_T := x_4$

$\alpha_T = 0.464$

eff. Sinkgeschwindigkeit von x_T : $v_{\text{Seff.T}} := \frac{\alpha_T \cdot D_t}{h_{\text{Kanal}}}$ $v_{\text{Seff.T}} = 0.46 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Konzentrationskorrektur: $v_{\text{S.T}} := \frac{v_{\text{Seff.T}}}{(1 - c_{\text{V.S}})^{4.65}}$ $v_{\text{S.T}} = 0.59 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Trennteilchengröße: $x_{\text{T_AM2}} := \sqrt{\frac{18 \cdot \eta_L \cdot v_{\text{S.T}}}{g \cdot (\rho_S - \rho_L)}}$ $x_{\text{T_AM2}} = 60.0 \mu\text{m}$

Vergleich der Ergebnisse:

Suspensionsteilungsmodell: $x_{\text{T_TM}} = 79.9 \mu\text{m}$

Anzapfmodell I: $x_{\text{T_AM1}} = 56.1 \mu\text{m}$

Anzapfmodell II: $x_{\text{T_AM2}} = 60.0 \mu\text{m}$

Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der beiden Anzapfmodelle resultieren daraus, dass die angezapften Partikelkonzentrationen nicht unabhängig von den angezapften Volumenströmen sind (Feststoffmassenbilanz!). Durch die Annahme gleicher Volumenstromverhältnisse wie bei Suspensionsteilung wird diese Abhängigkeit jedoch ignoriert.

Feststoffbilanz: $c_{\text{V.ges}} \cdot (VS_{\text{klar}} + VS_{\text{trüb}}) = c_{\text{V.klar}} \cdot VS_{\text{klar}} + c_{\text{V.trüb}} \cdot VS_{\text{trüb}}$

Trüblauf: $c_{\text{V.trüb}} = c_{\text{V.ges}} + \frac{VS_{\text{klar}}}{VS_{\text{trüb}}} \cdot (c_{\text{V.ges}} - c_{\text{V.klar}})$

Klarlauf: $\frac{c_{\text{V.klar}}}{c_{\text{V.trüb}}} = \frac{c_{\text{V.ges}}}{c_{\text{V.trüb}}} - \left(1 - \frac{c_{\text{V.ges}}}{c_{\text{V.trüb}}}\right) \cdot \left(\frac{VS_{\text{klar}}}{VS_{\text{trüb}}}\right)^{-1}$

Vgl. mit dem Anzapfmodell: $\frac{c_{\text{V.klar}}}{c_{\text{V.trüb}}} = e^{-\alpha}$