Addendum zu natürlichen Koordinaten

Frage: Kann man „natürliche Einheitsvektoren" (Skript Kapitel 2.1.4) auch über Zeitableitungen statt über Bogenlängenableitungen definieren

Kurze Antwort: Ja, denn Zeit und Bogenlänge sind lediglich verschiedene Kurvenparameter, die über die Beziehung

$$s = \int_{t_0}^{t} dt' \, |\dot{\vec{r}}(t')| = s(t) \qquad (1)$$

zusammenhängen.

Ausführliche Antwort:

Sei $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \vec{r}(t)$ Kurve, die bezüglich der Zeit t parametrisiert ist.

Invertiert man Gl. (1) erhält man $t = t(s)$ (möglich, wenn $\dot{\vec{r}}$ nicht auf Teilintervall verschwindet)

Damit kann man $\vec{r}(t)$ neu über Bogenlänge parametrisieren:

$$\tilde{\vec{r}}: \hat{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto \tilde{\vec{r}}(s) := \vec{r}\big(t(s)\big) \equiv \vec{r}(s)$$

Gleichung (2.68) aus dem Skript zeigt einem, wie man den Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}$ entweder über $\vec{r}(t)$ oder $\vec{r}(s)$ bestimmt.

Ein zu $\hat{t}$ orthogonaler Vektor ist sowohl $\vec{n}(s) := \frac{d\hat{t}(s)}{ds}$ als auch $\vec{n}(t) := \frac{d\hat{t}(t)}{dt}$, denn

$$0 = \begin{cases} \frac{d}{dt} 1 = \frac{d}{dt}\left(\hat{t}(t) \cdot \hat{t}(t)\right) = 2 \frac{d\hat{t}(t)}{dt} \cdot \hat{t}(t) \propto \vec{n}(t) \cdot \hat{t}(t) \\ \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds}\left(\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s)\right) = 2 \cdot \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \cdot \hat{t}(s) \propto \vec{n}(s) \cdot \hat{t}(s) \end{cases}$$

Der Einheitsnormalenvektor ist dann

$$\hat{n}(s) = \frac{\vec{n}(s)}{|\vec{n}(s)|} = \frac{\frac{d\vec{n}(s)}{ds}}{\left|\frac{d\vec{n}(s)}{ds}\right|} \overset{s=s(t)}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{\frac{d\vec{n}(s(t))}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\vec{n}(s(t))}{dt}\frac{dt}{ds}\right|}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorzeichen}}}{\mathrm{sgn}}\left(\frac{dt(s)}{ds}\right) \cdot \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|}$$

$$= \mathrm{sgn}\left(\frac{1}{|\vec{v}|}\right) \hat{n}(t) = \hat{n}(t)$$

Das heißt für den Normaleneinheitsvektor ist es egal, ob man die Kurve bzgl. der Zeit oder d. Bogenlänge parametrisiert.

$$\boxed{\hat{n}(s) \equiv \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{n}(s)}{ds}\right| \underset{s=s(t)}{=} \frac{d\vec{n}(t)}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{n}(t)}{dt}\right| \equiv \hat{n}(t)}$$

Vergleichen wir zum Schluss noch die Krümmung $\varkappa$ für beide Parametrisierungen. Dafür betrachten wir nochmals den Normalenvektor

$$\vec{n}(s) = \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \left|\frac{d\hat{t}(s)}{ds}\right| \hat{n}(s) = \varkappa\ \hat{n}(s)$$

Das ist die Konvention aus der Vorlesung, $\varkappa = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$. Andererseits ist

$$\vec{n}(t) = \frac{d\hat{t}(t)}{dt} = \left|\frac{d\hat{t}(t)}{dt}\right| \hat{n}(t) \underset{\substack{\uparrow \\ t=t(s)}}{=} \left|\frac{d\hat{t}(t(s))}{ds}\frac{ds}{dt}\right| \hat{n}(t)$$

$$= \varkappa\,|\vec{v}|\,\hat{n}(t)$$

Damit erhalten wir,

$$\boxed{\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right| = \varkappa\,|\vec{v}| \qquad \text{bzw.} \qquad \varkappa = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|}$$

d.h. $\varkappa$ auch über $|\vec{n}(t)|$ bestimmbar.

Die Definition von $\varkappa$ als Ableitung bzgl. d. Bogenlänge hat den Vorteil, dass sie geschwindigkeitsunabhängig ist.