8 Biegung prismatischer Träger

8.1 Voraussetzungen

Unter einem **prismatischen Träger** wird ein Balken verstanden, dessen Querschnitt über die komplette Balkenlänge konstant bleibt. Sind für einen Teil oder über die komplette Balkenlänge die Schnittgrößenverläufe

$$F_Q = 0,\ F_L = 0,\ M_b = \text{konstant} \tag{1}$$

so wird von **reiner Biegung** gesprochen. Dabei gilt stets, dass die Länge des Trägers l viel größer als die Querschnittshöhe h und die Querschnittsbreite b sein muss.

$$l >> h,\ b \tag{2}$$

Infolge der Biegemomentenbeanspruchung im Träger biegt sich der Balken durch. Vereinfacht wird in der TM I die **Bernoulli-Hypothese** angewendet. Diese ist eine idealisierte Betrachtungsweise und besagt, dass die Balkenquerschnitte auch im verformten Zustand konstant und senkrecht zur verformten Balkenachse bleiben.

Wird ein Träger durch reine Biegung belastet, so wird über die Balkenhöhe seine eine Randfaser gedrückt, die andere Randfaser wird gezogen. Über die Balkenhöhe muss deshalb eine Faser existieren, an der sich die Länge nicht ändert. Diese Faser wird als **neutrale Faser** bezeichnet und liegt im Flächenschwerpunkt des Balkenquerschnitts.

8.2 Bestimmung des Flächenschwerpunktes

In vorherigen Kapiteln wurden bereits Streckenlasten q eingeführt, die auf ein statisches System, z.B. einen Balken, wirken können. Um die Lagerreaktionen solcher Systeme bestimmen zu können, wurden Ersatzfreischnitte gezeichnet, in denen die Streckenlasten durch eine resultierende Kraft F_R bzw. F_q ersetzt wurden. Die resultierende Kraft F_R einer Streckenlast $q(z)$, die über die Balkenlänge l wirkt, wurde dabei durch die Integration der Streckenlast über die Länge definiert.

$$F_R = \int_0^l q(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

Die Richtung der Resultierenden entspricht der Richtung der Streckenlast. Der Angriffspunkt der Resultierenden F_R muss dabei so gewählt werden, dass die **statische Äquivalenz** gewährleistet wird. D.h. die Größe der Lagerkräfte und -momente am Ersatzfreischnitt muss gleich sein mit den Lagerkräften und -momenten am Freischnitt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Angriffspunkt der resultierenden Kraft mit dem Flächenschwerpunkt der Streckenlast zusammenfällt. Der Schwerpunkt $\bar{z}_S$ einer Streckenlast wird dabei berechnet durch

$$\bar{z}_S = \frac{1}{A} \cdot \int \bar{z}\ \mathrm{d}A = \frac{1}{A} \cdot \iint \bar{z}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4}$$

Neben den Flächenschwerpunkten von Streckenlasten können auch geometrische Schwerpunkte z.B. von Querschnitten definiert werden. In der ebenen Betrachtung (x-y-Koordinatensystem) gilt für den **geometrischen Schwerpunkt eines Körpers**

$$\bar{x}_S = \frac{1}{A} \cdot \int \bar{x} \, \mathrm{d}A \tag{5}$$

$$\bar{y}_S = \frac{1}{A} \cdot \int \bar{y} \, \mathrm{d}A \tag{6}$$

Die Integrale werden dabei als **Flächenmomente 1. Ordnung** bzw. **statische Momente** S_x, S_y bezeichnet.

$$S_x = \int \bar{x} \, \mathrm{d}A \tag{7}$$

$$S_y = \int \bar{y} \, \mathrm{d}A \tag{8}$$

Beispiel

Merke:

1. Besitzt eine Fläche ein oder zwei Symmetrieachsen, so befindet sich der Schwerpunkt immer auf diesen.

2. Einige Schwerpunktskoordinaten sind in Abbildung 1 dargestellt, weitere sind in der Formelsammlung enthalten.

3. Häufig werden in der Mechanik lokale, kartesische $x-y-$Koordinatensysteme verwendet, deren Koordinatenursprung im Flächenschwerpunkt des Systems liegt.

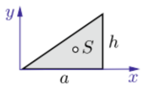
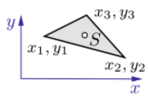
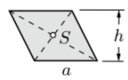
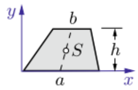
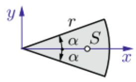
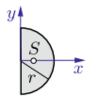
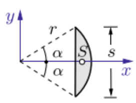
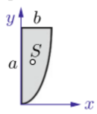
Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
rechtwinkliges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}\,ah$	$x_s = \frac{2}{3}\,a, \quad y_s = \frac{h}{3}$
beliebiges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)]$	$x_s = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ $y_s = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$
Parallelogramm 	$A = a\,h$	S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez 	$A = \frac{h}{2}(a+b)$	S liegt auf der Seitenhalbierenden $y_s = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$
Kreisausschnitt 	$A = \alpha\,r^2$	$x_s = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
Halbkreis 	$A = \frac{\pi}{2}\,r^2$	$x_s = \frac{4\,r}{3\,\pi}$
Kreisabschnitt 	$A = \frac{1}{2}\,r^2(2\,\alpha - \sin 2\,\alpha)$	$x_s = \frac{s^3}{12\,A} = \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3\alpha}{2\,\alpha - \sin 2\,\alpha}$
quadratische Parabel 	$A = \frac{2}{3}\,a\,b$	$x_s = \frac{3}{8}\,b$ $y_s = \frac{3}{5}\,a$

Abbildung 1: Aus: Gross, Hauger, Schröder, Wall; *Technische Mechanik 1 - Statik*; Springer Verlag, 13. Auflage, S. 110-111; 2016

8.3 Spannungen und Dehnungen

In Kapitel 6 wurden die Begriffe Spannungen und Dehnungen eingeführt. Im Allgemeinen werden die Spannungs- und Dehnungsverläufe über den Querschnitt in einem Koordinatensystem dargestellt, **das im Flächenschwerpunkt des Querschnitts** liegt. Wird ein Stab oder Balken nur durch eine Einzelkraft F in Längskraftrichtung belastet und der Träger rechtwinklig zur Belastungsrichtung geschnitten, so entstehen nur Normalspannungen im Träger. Diese sind über die Höhe h des Querschnitts A konstant.

$$\sigma(y) = \frac{F}{A} = \text{ konstant} \tag{9}$$

Durch das Hooke'sche Gesetz sind auch die zugehörigen Dehnungen über den Querschnitt konstant.

$$\varepsilon(y) = \frac{\sigma(y)}{E} = \frac{F}{EA} = \text{ konstant} \tag{10}$$

Wird ein Balken nicht durch eine Längskraft, sondern durch ein Moment M_{bx} belastet, so entstehen ebenfalls Spannungen und Dehnungen im Inneren des Trägers. Anders als bei Längskraftbelastung, sind diese über die Querschnittshöhe h nicht konstant.

Wird ein Träger nur durch ein Moment belastet, so sind die Dehnungen $\varepsilon(y)$ linear über die Querschnittshöhe.

$$\varepsilon(y) = C_\varepsilon \cdot y \tag{11}$$

mit der Konstanten C_ε, die durch geometrische Überlegungen bestimmt werden kann. Weiterhin werden nur elastische Verformungen angenommen und es gilt das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma(y) = E \cdot \varepsilon(y) \tag{12}$$

wodurch auch die Spannungen linear über die Querschnittshöhe verlaufen müssen.

Die Normalspannungen im Inneren des Körpers entstehen infolge der äußeren Belastung durch das Biegemoment M_{bx}. Das äußere Biegemoment M_{bx} entspricht dabei dem **resultierenden Moment** der inneren Spannungen $\sigma(y)$ um den Flächenschwerpunkt (Analog zum Kapitel Torsion!).

Der Zusammenhang zwischen Moment M_{bx} und Normalspannungen $\sigma(y)$ ist dann

$$M_{bx} = \int \sigma(y) \cdot y \;\mathrm{d}A = \int E \cdot \varepsilon(y) \cdot y \;\mathrm{d}A = \int E \cdot C_\varepsilon \cdot y \cdot y \;\mathrm{d}A = E \cdot C_\varepsilon \cdot \int y^2 \;\mathrm{d}A = \frac{\sigma}{y} \cdot I_{xx} \tag{13}$$

dabei ist I_{xx} das Flächenträgheitsmoment bezogen auf das Schwerpunkt-Koordinatensystem.

$$I_{xx} = \int y^2 \;\mathrm{d}A \tag{14}$$

Umstellen nach den Normalspannungen liefert dann den Zusammenhang

$$\sigma(y) = \frac{M_{bx}}{I_{xx}} \cdot y \tag{15}$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz gilt für die Dehnungen dann

$$\varepsilon(y) = C_\varepsilon \cdot y = \frac{\sigma(y)}{E} = \frac{M_{bx}}{E \cdot I_{xx}} \cdot y \quad \Rightarrow C_\varepsilon = \frac{M_{bx}}{E \cdot I_{xx}} \tag{16}$$

Das **Widerstandsmoment** W_x der Struktur gegen die Biegebelastung ergibt sich aus

$$W_x = \frac{I_{xx}}{\max|y|} \tag{17}$$

Wodurch die maximale Beanspruchung bei reiner Biegung definiert werden kann über

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{bx}}{W_x} \right| \tag{18}$$

Wird der Träger durch eine Kombination aus Längskraft und Biegemoment belastet, so werden die Spannungen superponiert und es gilt

$$\sigma(y) = \frac{F}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} \cdot y \tag{19}$$

8.3.1 Einschub: Flächenträgheitsmomente

Die **Flächenträgheitsmomente** werden auch als **Flächenmomente 2. Ordnung** bezeichnet. Werden die Flächenträgheitsmomente auf das $x-y-$Koordinatensystem im Flächenschwerpunkt bezogen, so gilt

$$I_{xx} = \int y^2 \, \mathrm{d}A \tag{20}$$

$$I_{yy} = \int x^2 \, \mathrm{d}A \tag{21}$$

$$I_{xy} = -\int x \cdot y \, \mathrm{d}A \tag{22}$$

I_{xx} und I_{yy} werden als **axiale Flächenträgheitsmomente** bezeichnet, I_{xy} als **Deviations-** oder **Zentrifugalmoment**. Die Flächenträgheitsmomente sind für einfache Geometrien tabelliert und können der Formelsammlung entnommen werden.

Die Transformation von einem $(x-y-)$Flächenschwerpunktsystem zu einem beliebigen parallelen (nicht-gedrehten) $(\bar{x}-\bar{y}-)$Koordinatensystem wird mit dem **Satz von Steiner** durch Einführung von Steiner-Gliedern durchgeführt. Es gilt

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_S^2 \cdot A \tag{23}$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_S^2 \cdot A \tag{24}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - \bar{x}_S \bar{y}_S \cdot A \tag{25}$$

wobei $(x_S,\ y_S)$ den Koordinaten des Flächenschwerpunkts im parallelen $(\bar{x}-\bar{y}-)$Koordinatensystem entsprechen.

Beispiel

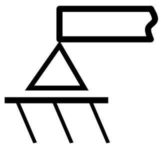
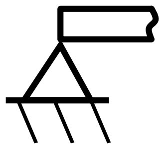
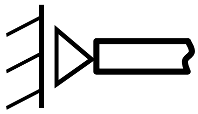
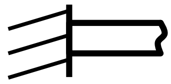
8.4 Differentialgleichung der elastischen Linie

Biegt sich ein Träger unter Belastung durch, so kann die Verschiebung in y-Richtung u_y über die Balkenlängskoordinaten z bestimmt werden. Der entsprechende Verlauf wird als **Biegelinie** oder auch **elastische Linie** bezeichnet und durch $v(z)$ beschrieben. Die Biegelinie kann dabei aus den Schnittgrößenverläufen hergeleitet werden.

$v(z)$ beschreibt dabei die Durchbiegung an der Stelle z, $v^I(z)$ beschreibt die Neigung der Biegelinie. v^{IV} entspricht dabei der 4. Ableitung von $v(z)$ nach z.

$$\begin{array}{ccccc} EIv^{IV} & = & q(z) & & \\ EIv^{III} & = & F_Q(z) & = & \int q(z)\,\mathrm{d}z + C_1 \\ EIv^{II} & = & -M_b(z) & = & \int F_Q(z)\,\mathrm{d}z + C_2 \\ EIv^{I} & & & = & \int -M_b(z)\,\mathrm{d}z + C_3 \\ EIv & & & = & \int EIv^I(z)\,\mathrm{d}z + C_4 \end{array} \tag{26}$$

Um die Differentialgleichung der Biegelinie $EIv(z)$ mit den unbekannten Konstanten $C_1, \ldots, C_4$ zu lösen, werden die **geometrischen und statischen Randbedingungen** des Systems benutzt. An jedem Balkenrand müssen dafür mindestens 2 Randbedingungen bekannt sein. Für die gängigsten Lager sind jeweils 2 Randbedingungen in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

System					
1. Randbedingung					
2. Randbedingung					

Für die Lösung der Aufgaben wird folgendes Vorgehen empfohlen

1. Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen aufstellen
2. Schnittgrößenverläufe F_Q und M_b bestimmen
3. Gleichungssystem der elastischen Linie (Biegelinie) aufstellen
4. Aufstellen der Rand- und Übergangsbedingungen (für den Übergang zwischen 2 Teilbereichen)
5. Lösen

Beispiel 1

Beispiel 2