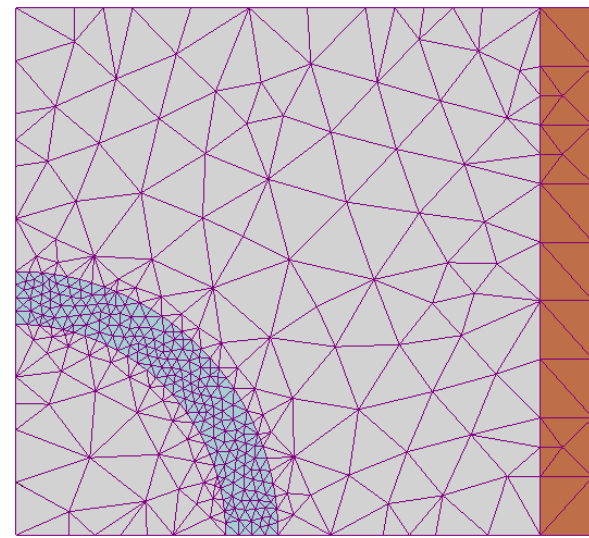
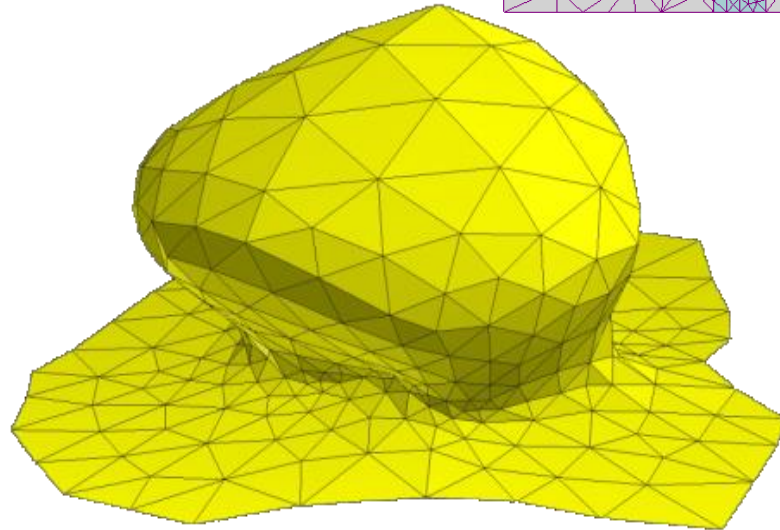
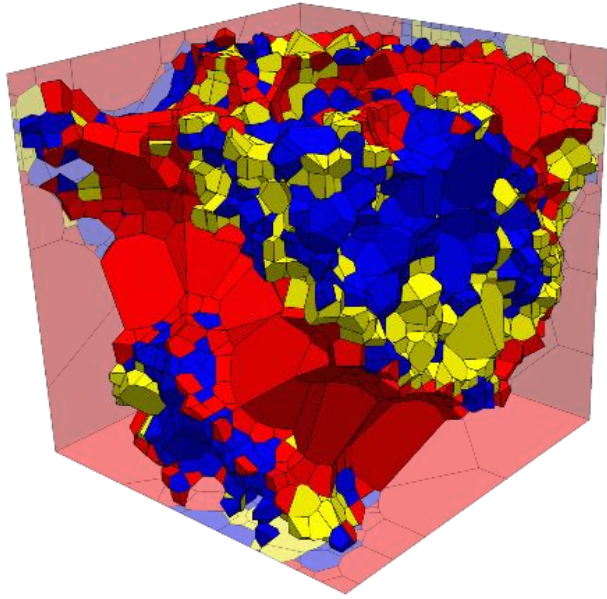


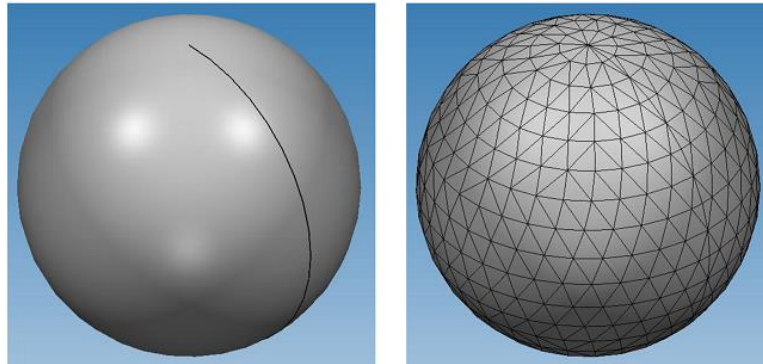
# 3D Geomodellierung

## 4. Vermaschungen



## Vermaschung (engl. tessellation)

Im Bereich “computer aided geometric design” oder “computational geometry” bezieht sich der Terminus “Vermaschung” auf jedes beliebige Verfahren, um ein beliebiges  $n$ -dimensionales Objekt in eine Menge benachbarter polytopaler\*  $n$ -dimensionaler Zellen zu zerlegen.



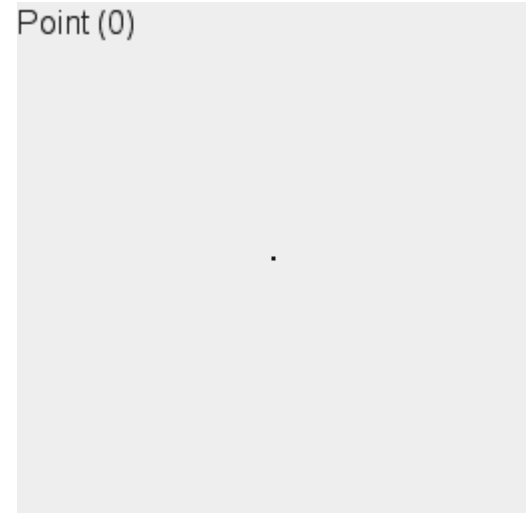
## \*Polytop

Verallgemeinerung des Polygons ( $n = 2$ ) auf beliebige Dimensionen:

- 0D: Punkt („*Knoten*“, „*nodes*“)
- 1D: Strecke, Liniensegment
- 2D: Polygon, Vieleck
- 3D: Polyeder, Vielflächener
- 4D: Polychor
- ...

Jedes  $n$ -Polytop ( $n > 0$ ) wird durch eine Menge von  $(n - 1)$ -Polytopen begrenzt.

Point (0)



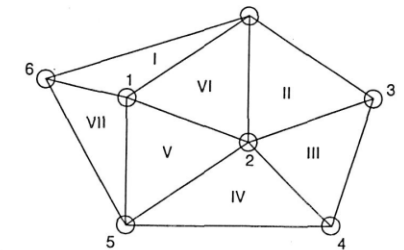
[https://de.wikipedia.org/wiki/Polytop\\_\(Geometrie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Polytop_(Geometrie))

# \*Polytop

Jedes Polytop lässt sich über seine Grenzpolytope beschreiben.

- 1D: Endpunkte der Strecke
- 2D: Kanten des Polygon, Endpunkte der Kanten
- ...

Die Kenntnis der beteiligten 0D Elemente ist immer notwendig. Diese werden als **Knoten** bezeichnet.



METHOD A

NODE COORDINATES		
Node	X	Y
1	.	.
2	.	.
3	.	.
4	.	.
5	.	.
6	.	.
7	.	.

TRIANGLE TOPOLOGY		
Triangle	Nodes	Adjacent Triangles
I	1,6,7	VII,O,VI
II	2,7,3	VI,O,III
III	2,3,4	II,O,IV
IV	2,4,5	III,O,V
V	5,1,2	VII,VI,IV
VI	1,7,2	I,II,V
VII	6,1,5	O,I,V

O=Outside

METHOD B

NODE COORDINATES			
Node	X	Y	Pointer
1	.	.	1
2	.	.	6
3	.	.	12
4	.	.	.
5	.	.	.
6	.	.	.
7	.	.	.

NODE COORDINATES	
Index	Connected Nodes
1	5
2	6
3	7
4	2
5	0 —
6	1
7	7
8	3
9	4
10	5
11	0 —
12	2
.	.
.	.

FIG. 3-13. TIN topology. Method A. The triangles are the basic spatial objects. Each triangle has topological attributes that describe the nodes and adjacent triangles. Method B. The nodes are the basic spatial objects. Each node is linked via a pointer to a table showing the directly-connected nodes, arranged in clockwise order. A zero (null) node is used to indicate the end of a string of connected nodes.

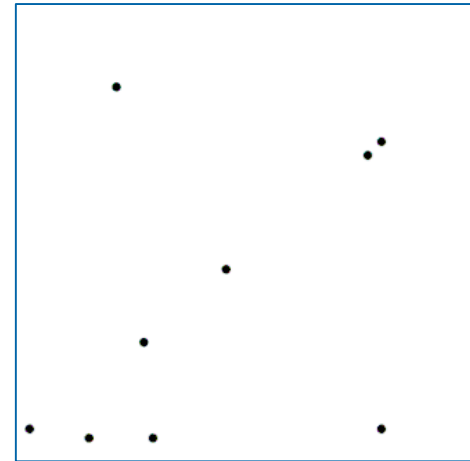
# Voronoi-Diagramm / Voronoi-Zerlegung

Auch bekannt unter: Thiessen-Polygone oder Dirichlet-Zerlegung

Gegeben ist eine Menge aus  $m$  **verschiedenen** Punkten  $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\}$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ .

Das *Voronoi-Polytop*  $V(\mathbf{p}_i)$  für einen Punkt  $\mathbf{p}_i \in P$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , der alle Punkte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  beinhaltet, die „näher“ an  $\mathbf{p}_i$  liegen als an jedem anderen Punkt aus  $P$ .

$$V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}) < d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \forall j \neq i\}$$

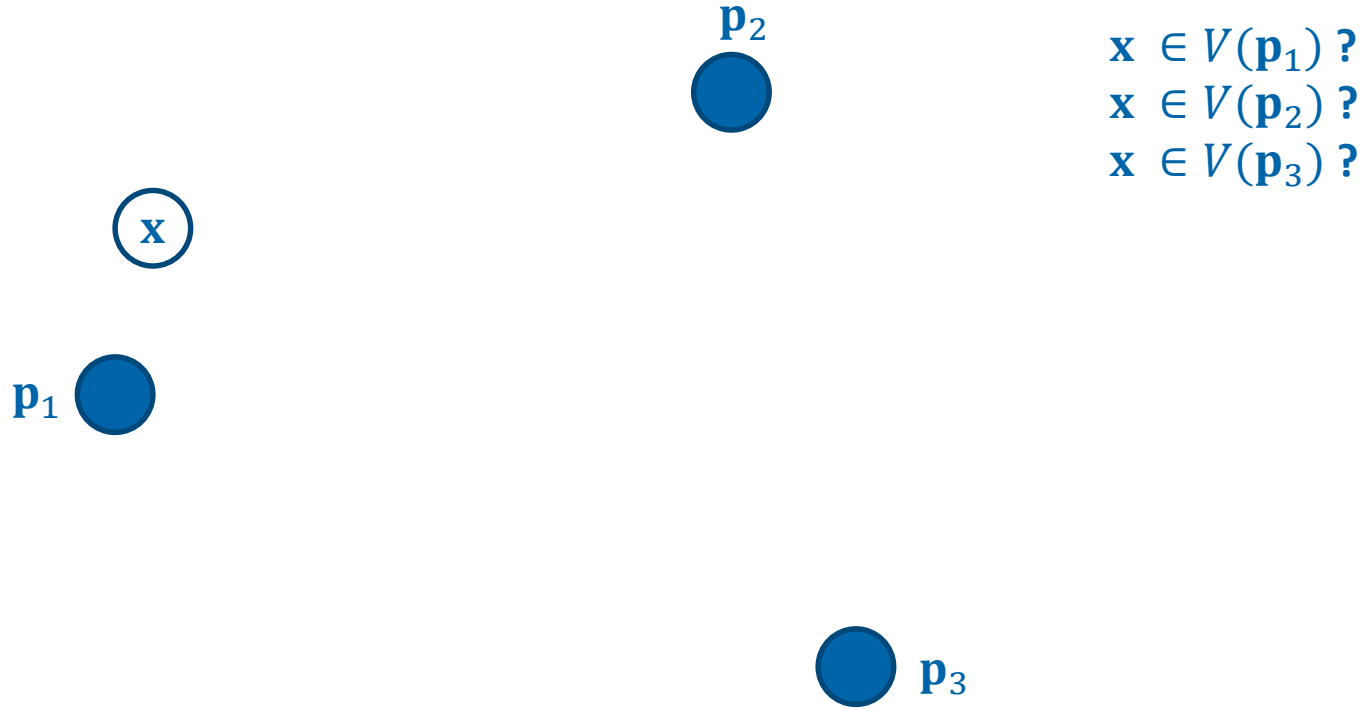


<https://de.wikipedia.org/wiki/Voronoi-Diagramm>

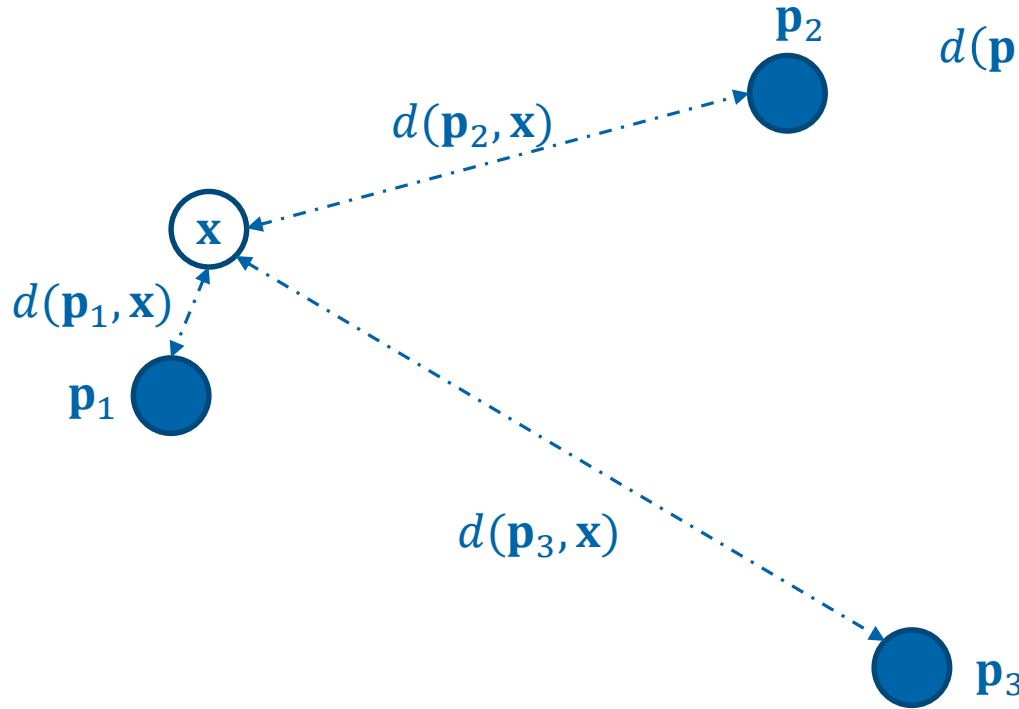
# Voronoi-Diagramm



## Voronoi-Diagramm



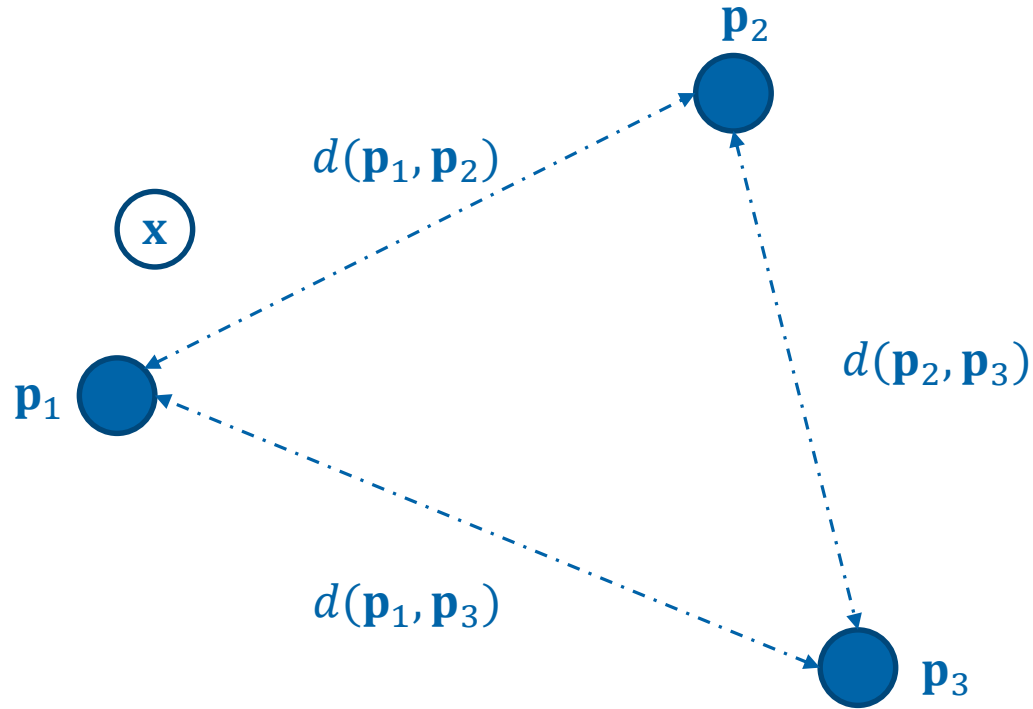
# Voronoi-Diagramm



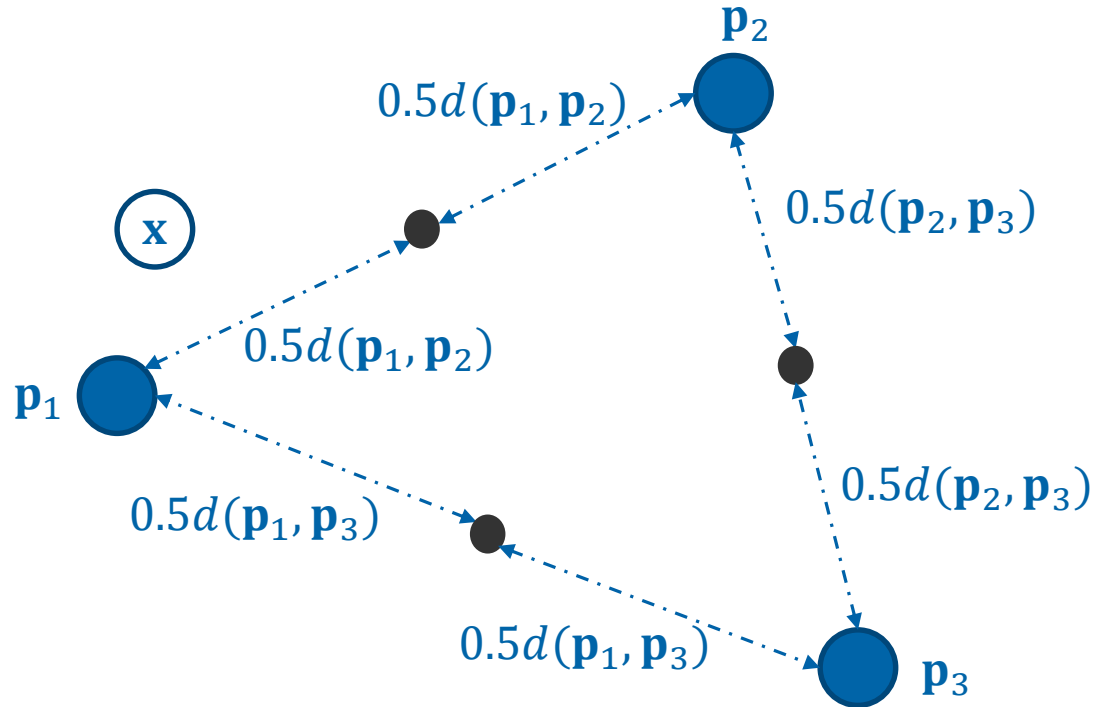
$$d(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}) < d(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}), d(\mathbf{p}_3, \mathbf{x})$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in V(\mathbf{p}_1)$$

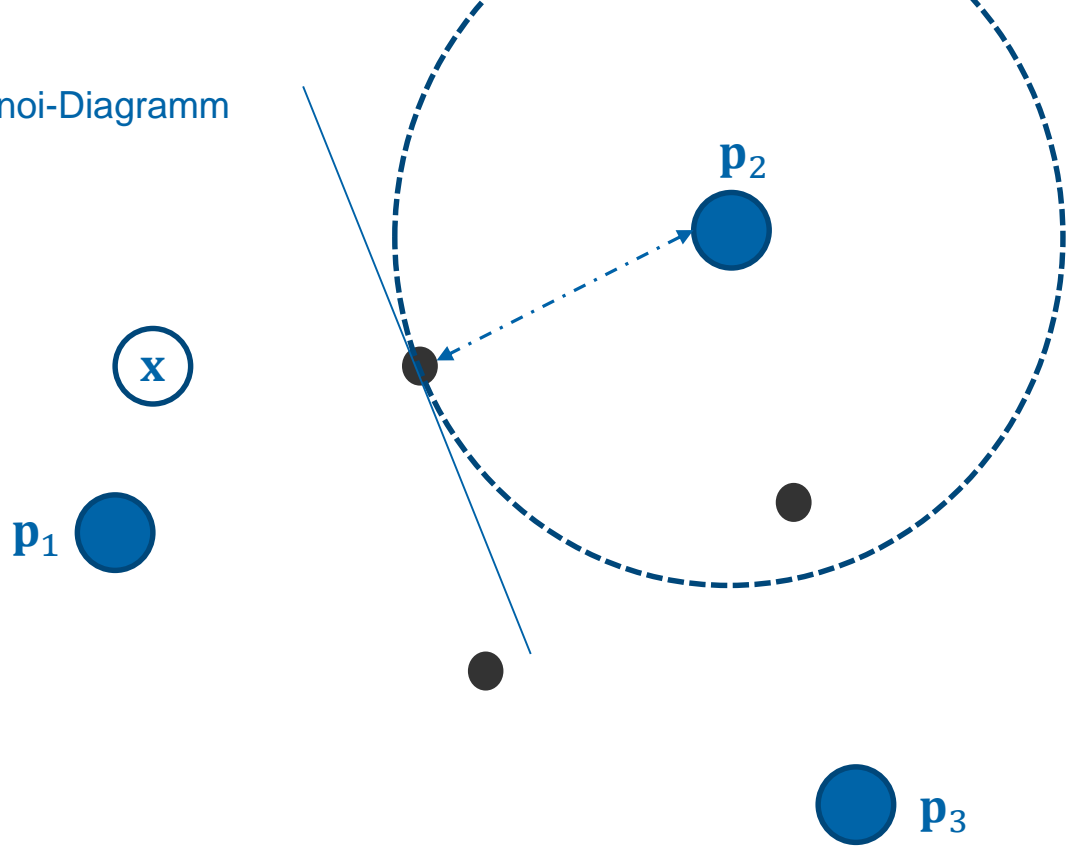
**Wo sind die Grenzen  
der Polygone?**



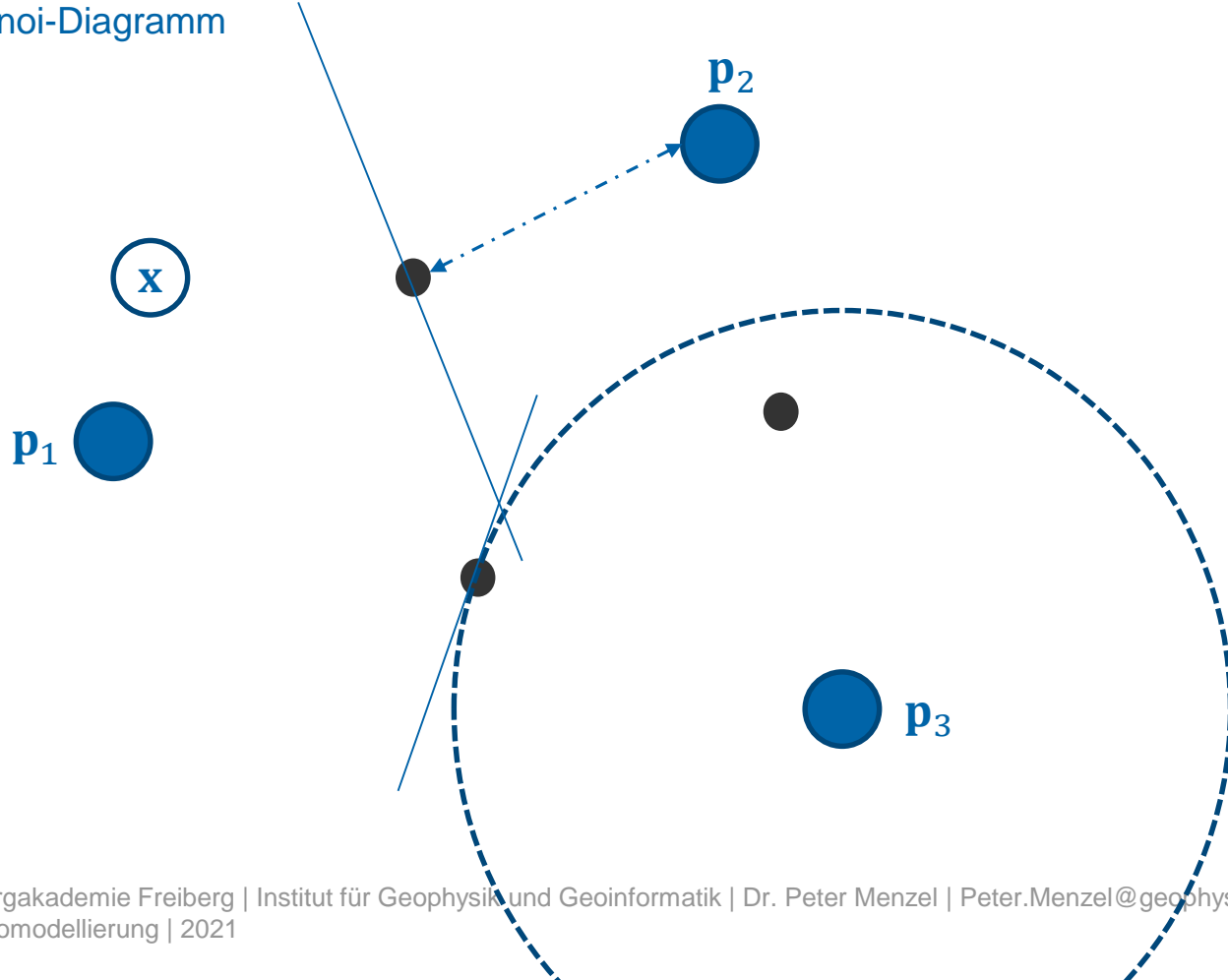
## Voronoi-Diagramm



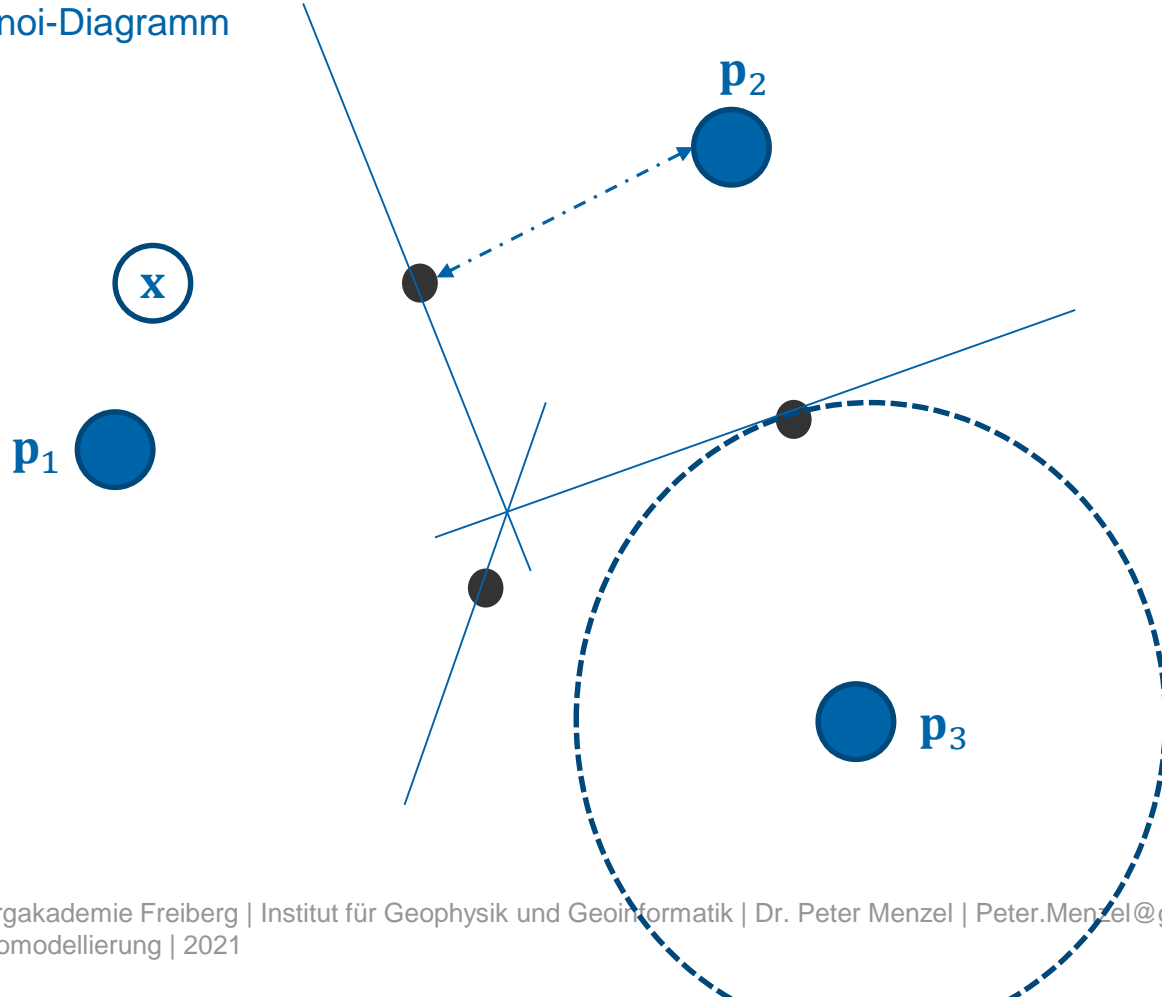
## Voronoi-Diagramm



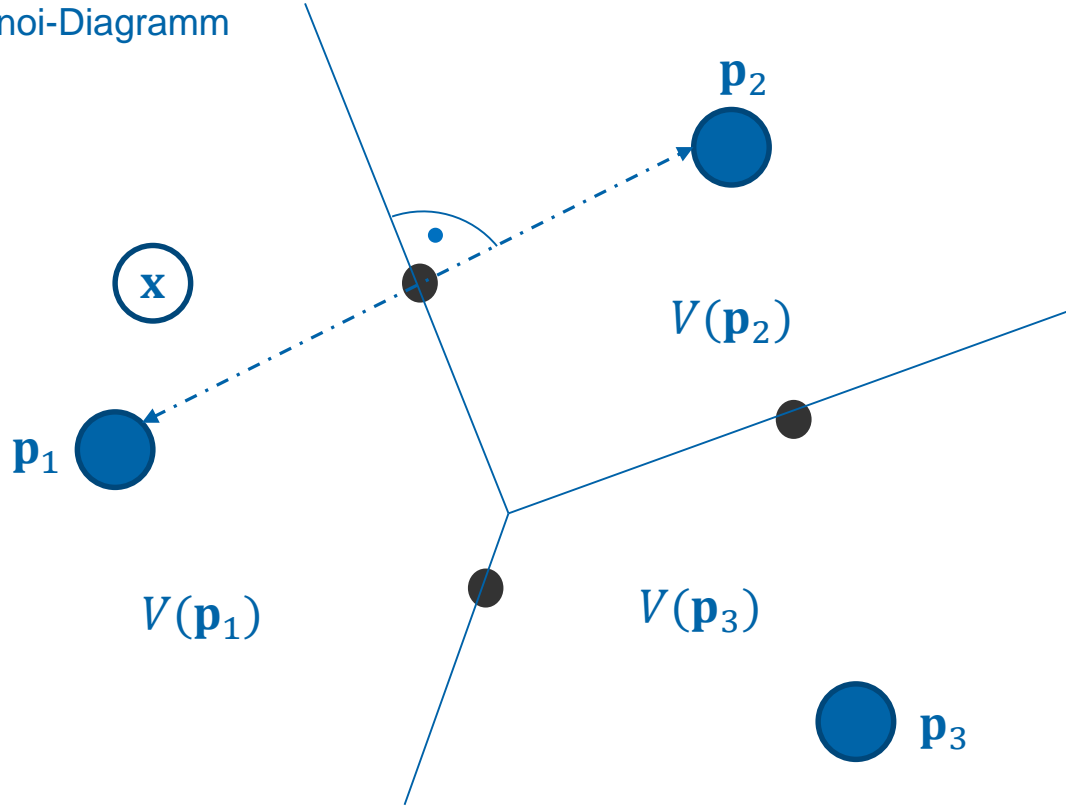
# Voronoi-Diagramm



# Voronoi-Diagramm



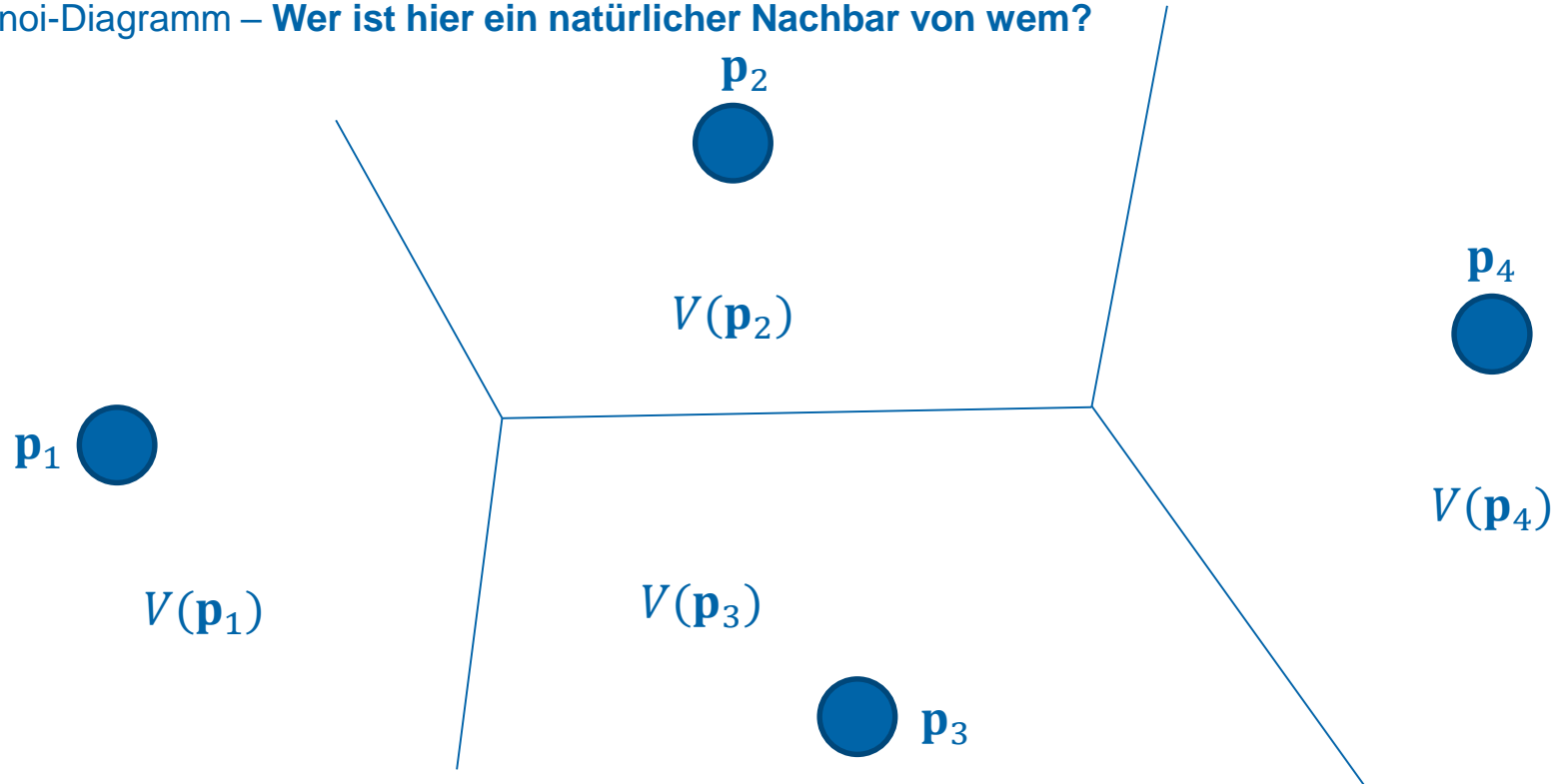
# Voronoi-Diagramm



Für  $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\} \in \mathbb{R}^n$  stellt  $\mathcal{V}(P)$  die *Voronoi-Vermaschung* von  $P$  dar, welche alle  $V(\mathbf{p}_i)$  umfasst:  $\mathcal{V}(P) = \{V(\mathbf{p}_i), 1 \leq i \leq m\}$ .

Alle Punkte  $\mathbf{p}_{i_j}, j = 1, \dots, J$ , deren Voronoi-Zellen  $V(\mathbf{p}_{i_j})$  ein Grenzelement mit der zum Punkt  $\mathbf{p}_i$  gehörigen Zelle  $V(\mathbf{p}_i)$  teilen werden als **kanonische** (engl. *canonical*) oder **natürliche** (engl. *natural*) **Nachbarn** von  $\mathbf{p}_i$  bezeichnet.

## Voronoi-Diagramm – Wer ist hier ein natürlicher Nachbar von wem?



In einer Voronoi-Vermaschung ist die Anzahl der Knoten und Grenzzellen **nicht** konstant für alle Polytope.

- Die Anzahl der natürlichen Nachbarn ist nicht konstant.
- Im 2D: Für jedes Polygon muss für die Repräsentation mindestens eine beliebig lange Liste mit den Knotenkoordinaten vorgehalten werden.

# Eigenschaften

- Jede Voronoi-Zelle  $V(\mathbf{p}_i)$  ist ein **konvexes\***, **ebenes** Polytop.
- Eine Voronoi-Zelle  $V(\mathbf{p}_i)$  ist **nur** dann ein unbegrenzter Teilraum des  $\mathbb{R}^n$ , wenn  $\mathbf{p}_i$  Teil der konvexen Hülle von  $P$  ist.
- Die Voronoi-Zerlegung  $\mathcal{V}(P)$  ist eine endliche zelluläre Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$ .

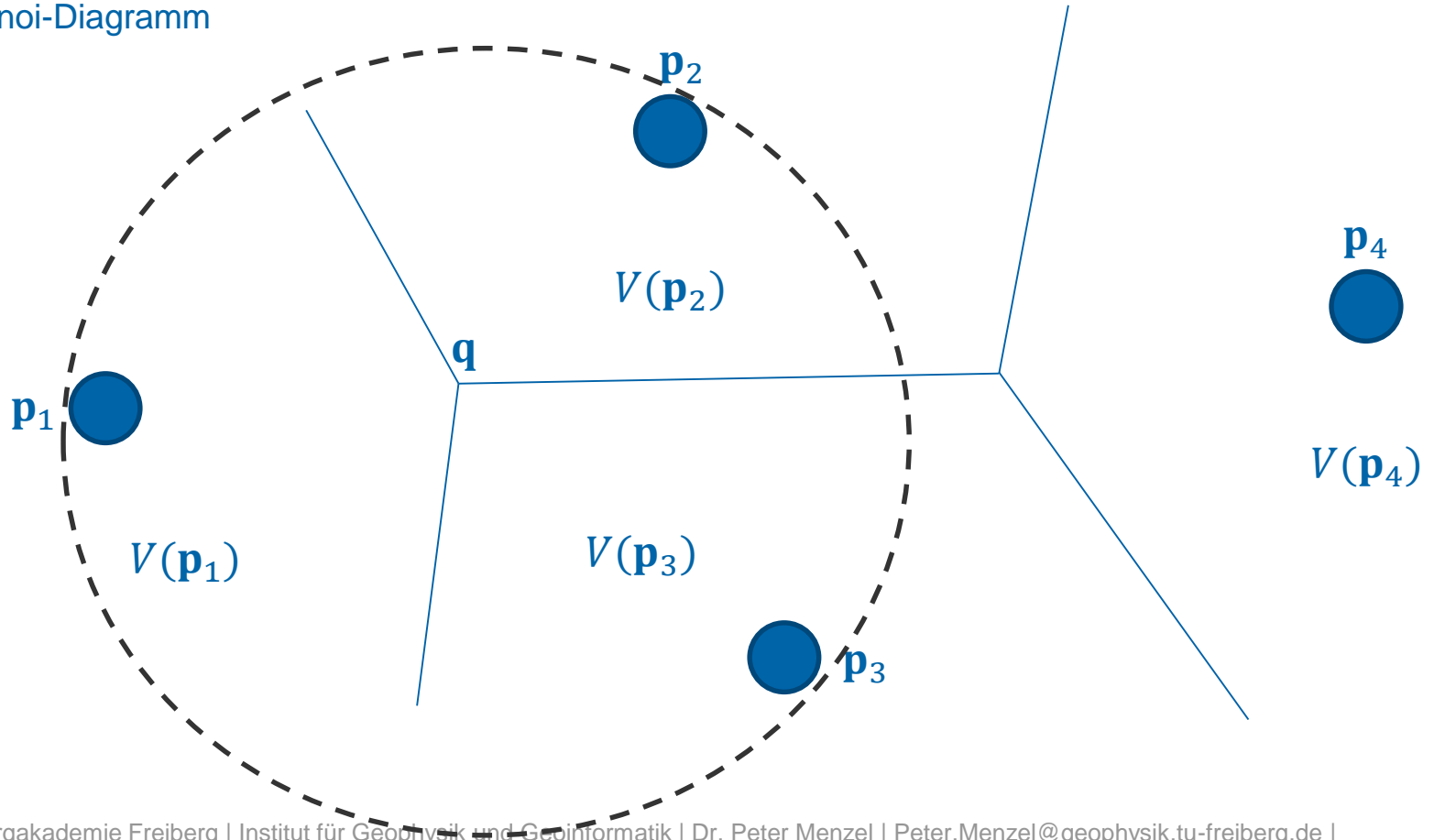
Geometrische Interpretation:

1. Projektion des Schnittes von Kegeln, deren Spitzen in den gegebenen Punkten liegen.
2. Das Ergebnis der kontinuierlichen Erweiterung der gegebenen Punkt zu Scheiben.

# Eigenschaften

- Wenn  $\mathbf{q}$  ein Knoten von  $\mathcal{V}(P)$  ist, in dem  $(n + 1)$  Voronoi-Zellen  $V(\mathbf{p}_0), \dots, V(\mathbf{p}_n)$  zusammentreffen, dann ist  $\mathbf{q}$  das Zentrum des  $n$ -dimensionalen Umkreises  $S(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ .  $S(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$  enthält keinen anderen Punkt  $\mathbf{p}_j \in P$ .

## Voronoi-Diagramm



# Interpolation mit Voronoi-Polygonen

- 2D stückweise konstante Interpolation („nearest neighbor“)
- 2D „natural neighbor“ Interpolation

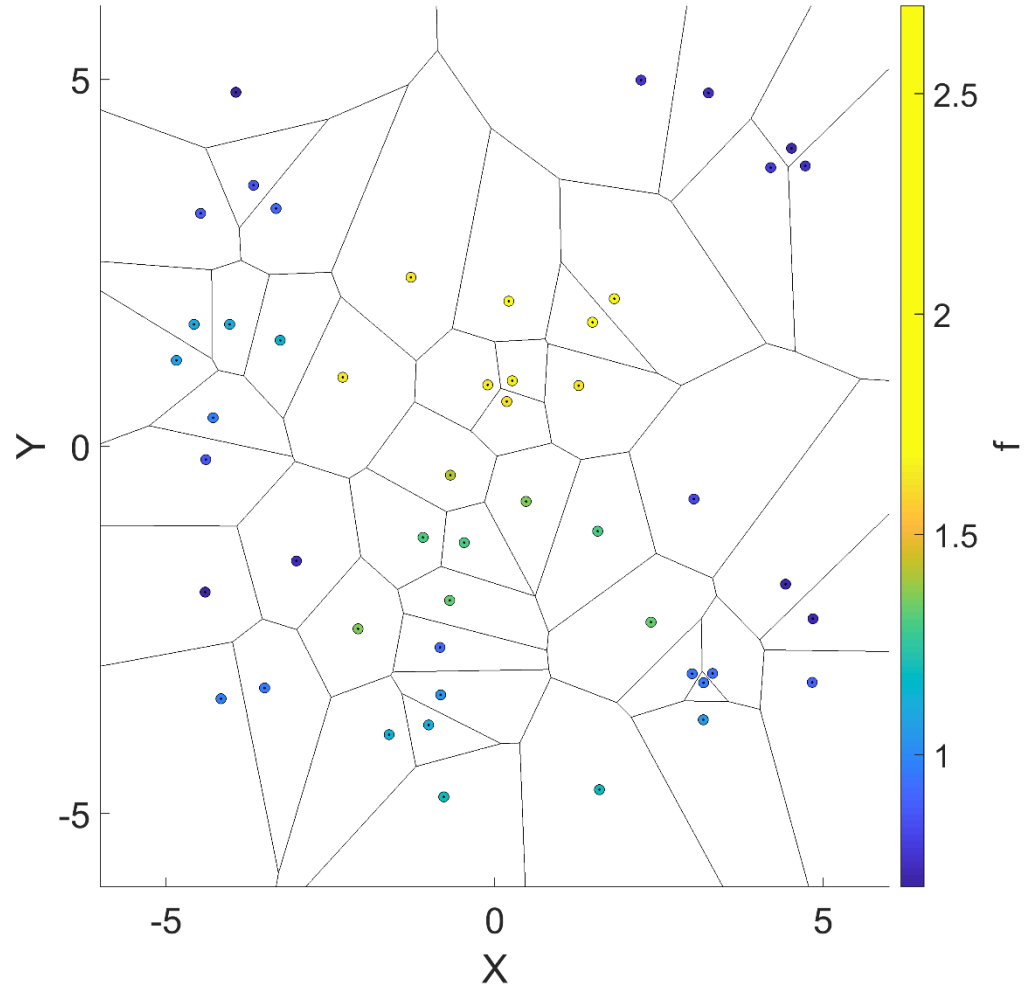
## Ausgangssituation:

Für jeden  $\mathbf{p}_i \in P$  ist ein Wert  $f_i(\mathbf{p}_i)$  gegeben.

## Interpolation:

Basierend auf  $f_i(\mathbf{p}_i)$  soll ein Wert  $\hat{f}(\mathbf{x})$  vorhergesagt werden.

# Interpolation mit Voronoi-Polygonen

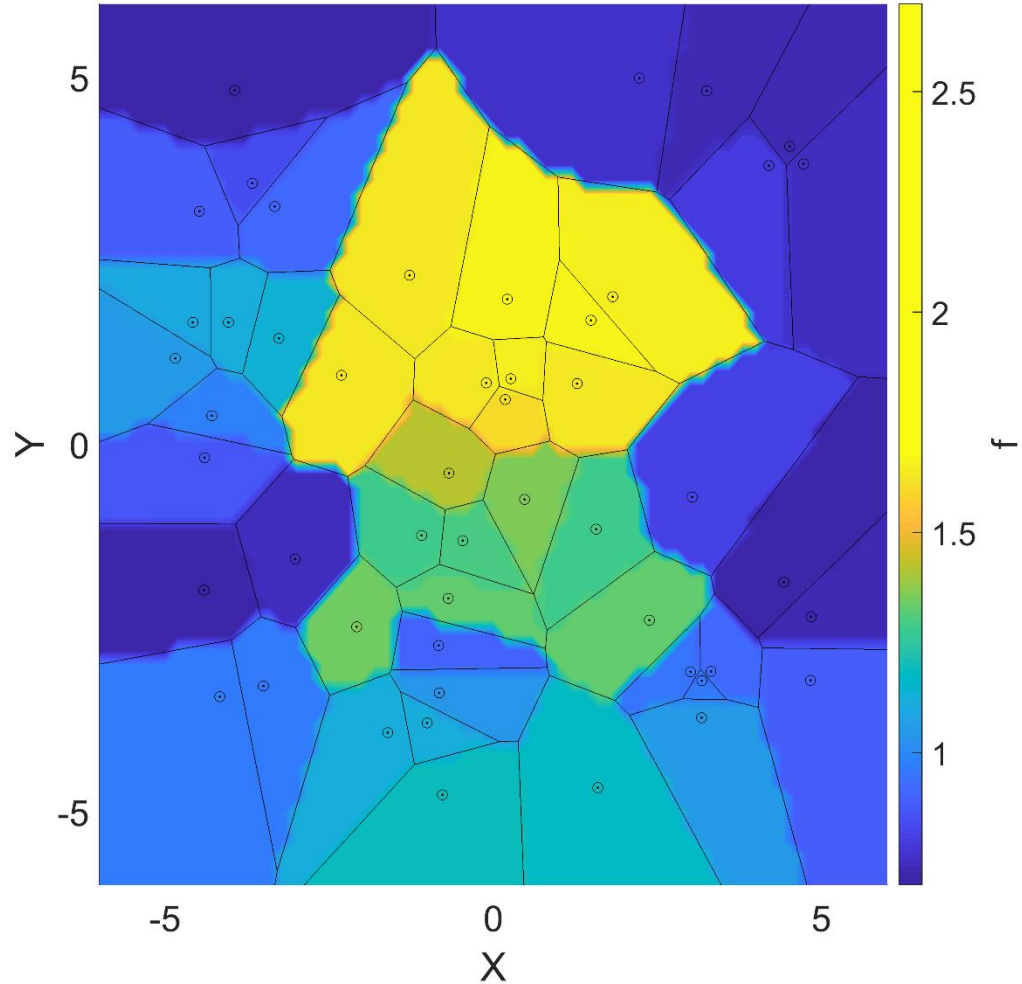


## 2D stückweise konstant

### Modellannahme:

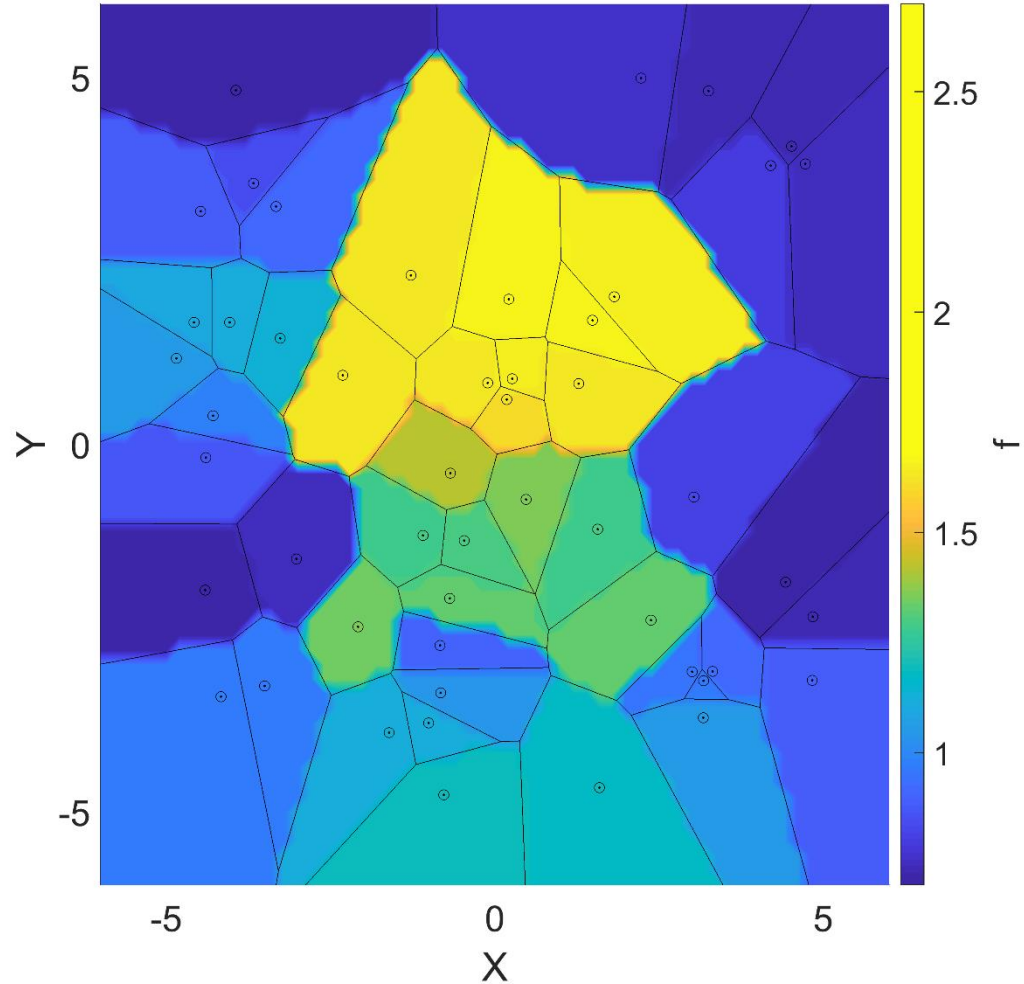
Ein vorhergesagter Wert  
bekannten Wert  $f_i(\mathbf{p}_i)$

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{V_i}(\mathbf{x}) f_i \text{ mit } \mathbb{I}_V$$



## 2D stückweise konstant

- Konstantes  $\hat{f}$  innerhalb der Voronoi-Zellen
- Sprungstellen an den Zellgrenzen

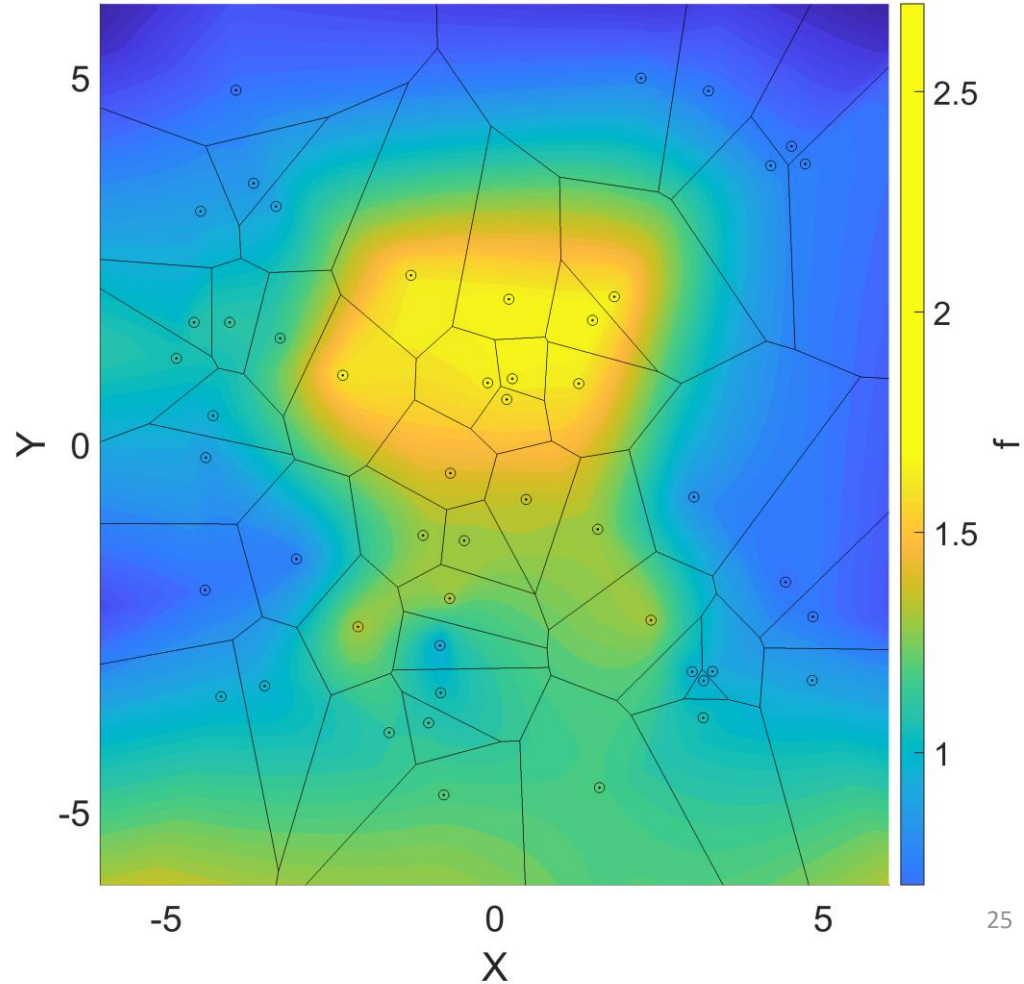


## 2D „natural neighbor“

### Modellannahme:

Ein vorhergesagter Wert für eine Position  $\mathbf{x}$  entspricht dem gewichteten Mittel seiner starken oder natürlichen Nachbarn

$$f_i(\mathbf{p}_{i(x)}).$$



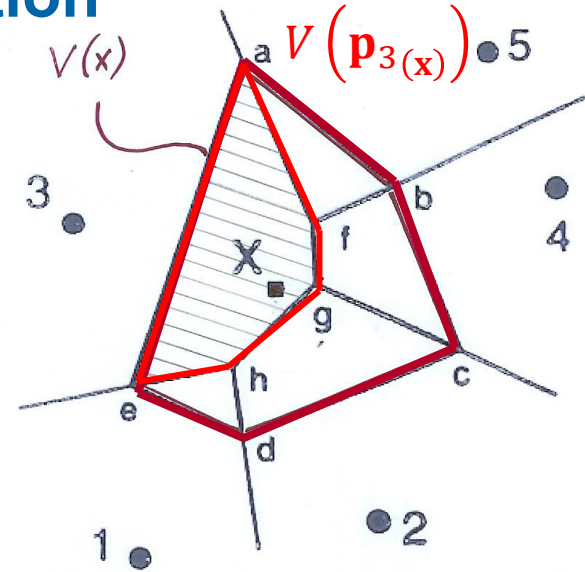
## 2D „natural neighbor“ Interpolation

**Gegeben:**  $(\mathbf{p}_i, f_i)$  und  $\mathcal{V}(P)$  für  $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\} \in \mathbb{R}^n$

Für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  wird seine „sekundäre“ Voronoi-Zelle  $V(\mathbf{x})$  bzgl. der Punktmenge  $P \cup \{\mathbf{x}\}$  erzeugt.

$\mathbf{p}_{i(\mathbf{x})}, i = 1, \dots, n(\mathbf{x})$  sind die starken oder natürlichen Nachbarn von  $\mathbf{x}$  und  $V(\mathbf{p}_{i(\mathbf{x})})$  das Schnittpolytop zwischen  $V(\mathbf{x})$  und  $V(\mathbf{p}_i) \in \mathcal{V}(P)$ :

$$V(\mathbf{p}_{i(\mathbf{x})}) = V(\mathbf{p}_i) \cap V(\mathbf{x})$$



New Voronoi cell about  $\mathbf{x}$

## 2D „natural neighbor“ Interpolation

Das so genannte „natural neighbor“ Gewicht  $N_i(x)$  für den  $i$ -ten natürlichen Nachbarn ist das Verhältnis der Maße\*  $m(V)$  der Polytope  $V(\mathbf{x})$  und  $V(\mathbf{p}_{i(\mathbf{x})})$

$$N_i(x) = \frac{m(V(\mathbf{p}_{i(x)}))}{m(V(\mathbf{x}))}$$

\*(*measure*) z.B. Länge in 1D, Fläche im 2D, Volumen in 3D

## 2D „natural neighbor“ Interpolation

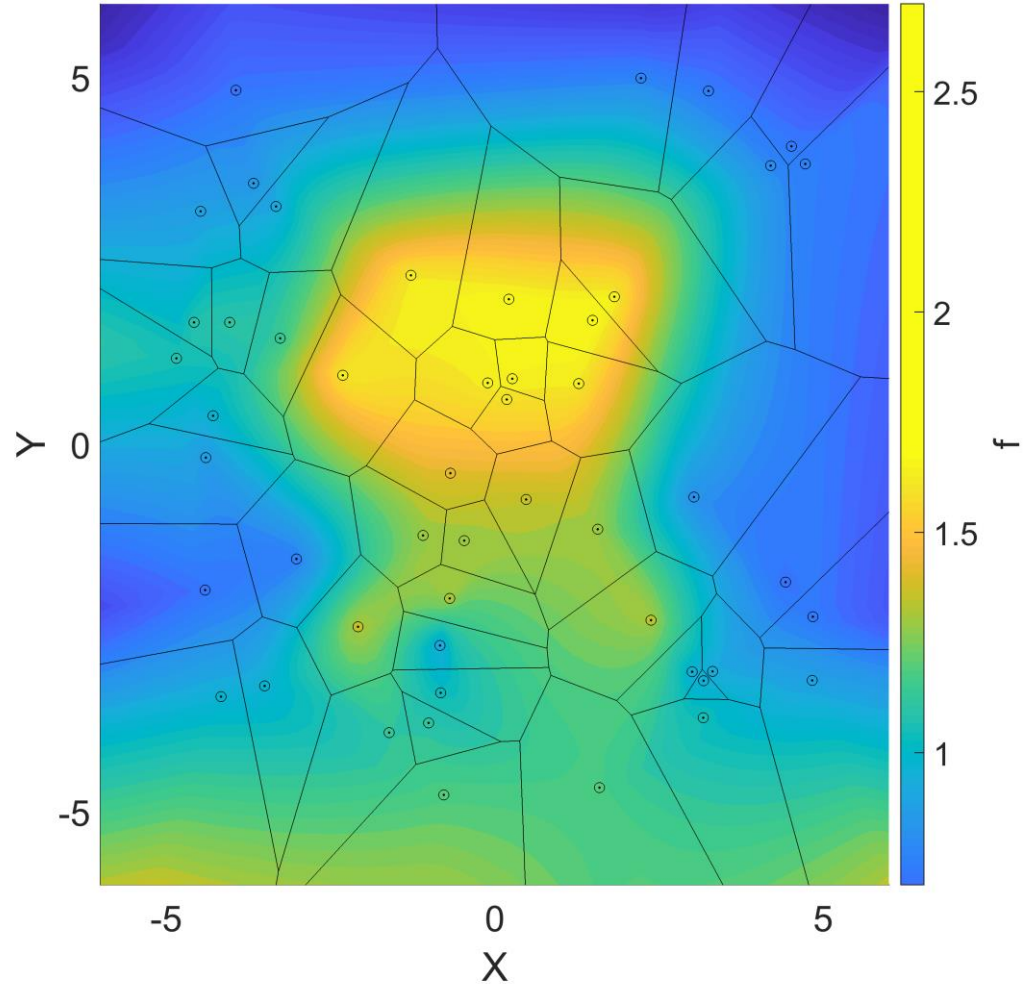
Die so genannte „natural neighbor“ Interpolation ist damit wie folgt definiert:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} N_i(\mathbf{x}) f_i$$

## 2D „natural neighbor“

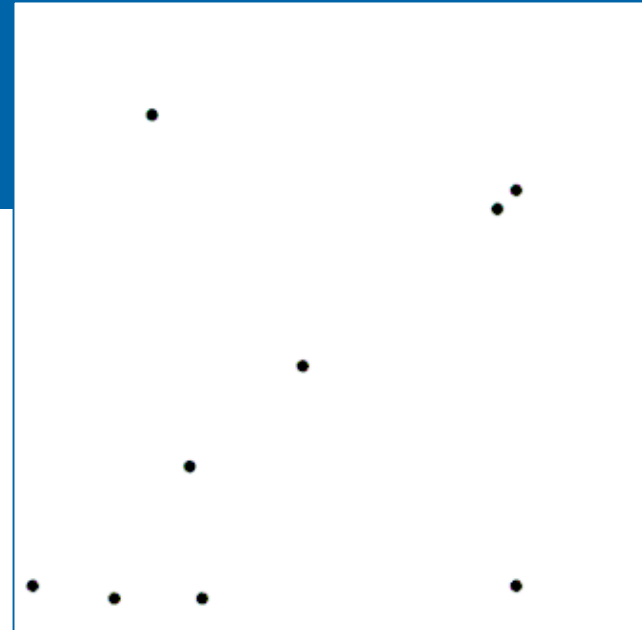
$\hat{f}$ :

- Exakter, lokaler Interpolator
- Glattes Interpolationsergebnis (unendliche oft stetig differenzierbar)



## Take-home questions:

- 1) Was ist eine Vermaschung?
- 2) Was ist das ausschlaggebende Kriterium für die Voronoi-Vermaschung?
- 3) Warum ist es für eine „nearest neighbor“-Interpolation **NICHT** notwendig, die zugrunde liegende Voronoi-Vermaschung explizit zu erstellen?
- 4) Warum ist die „natural neighbor“-Interpolation vergleichsweise aufwendig zu berechnen?



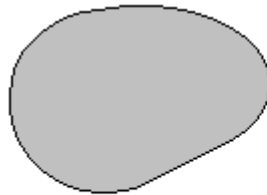
Institut für Geophysik und Geoinformatik  
Dr. Peter Menzel  
Gustav-Zeuner-Str. 12  
09599 Freiberg  
Tel. +49(0)3731 39-3815

## Die konvexe Hülle von $P$

Die **konvexe Hülle** einer Teilmenge  $M$  eines reellen oder komplexen Vektorraums  $V$ , ist die *kleinste konvexe Menge*, die  $M$  enthält.

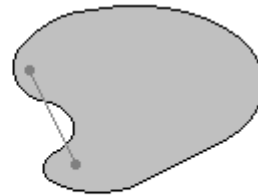
Bezeichnung:  $\text{conv}(M)$  oder  $[M]$

**Definition:** Eine Menge von Punkten in der Ebene heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.



(a)

konvex



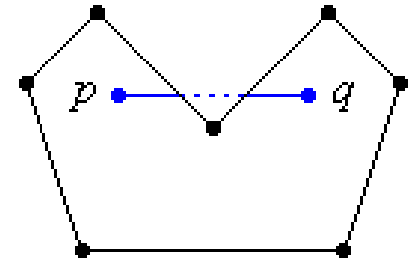
(b)

nicht-konvex

## Die konvexe Hülle von $P$

Sei  $p$  ein Punkt in einem Polygon. Ein Punkt  $q$  ist von  $p$  aus sichtbar, wenn die Verbindungsstrecke zwischen  $p$  und  $q$  ganz im Polygon enthalten ist.

Ein Polygon heißt *konvex*, wenn von jedem seiner Punkte aus alle Punkte des Polygons sichtbar sind.

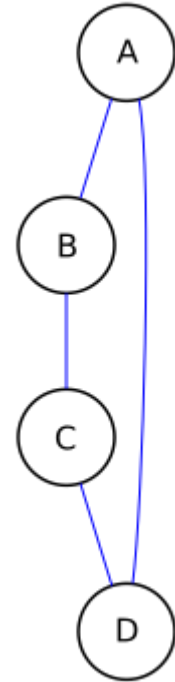


Die konvexe Hülle  $[P]$  einer Punktmenge  $P$  wird repräsentiert durch das kleinste konvexe Polygon, welche alle Punkte von  $P$  beinhaltet.

## Der Graph $\mathcal{G}(\Omega, N)$

Der Graph  $\mathcal{G}(\Omega, N)$  ist definiert über

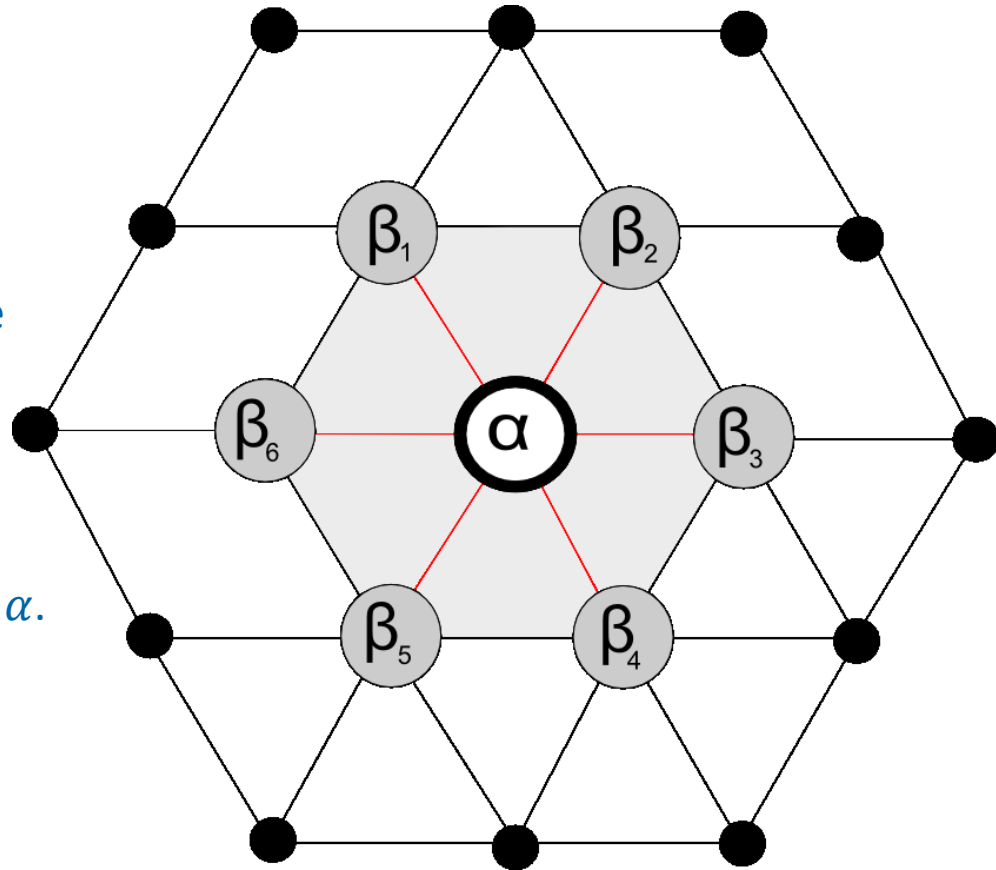
- Die Menge  $\Omega$  der Knoten (*nodes*).
- Jeder Knoten  $\alpha_i \in \Omega$  ist über so genannte Kanten (*edges*) mit anderen Knoten  $\beta_j \in \Omega$  verbunden. Kanten können sowohl gerichtet als auch ungerichtet sein.



ungerichteter Graph  
([https://de.wikipedia.org/wiki/Graph\\_\(Graphentheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)))

## Der Graph $\mathcal{G}(\Omega, N)$

- Die Abbildung  $N: \Omega \mapsto \mathcal{P}(\Omega)$ , welche jedem Knoten  $\alpha \in \Omega$  eine Menge von Knoten  $\beta_j \in \Omega$  zuordnet, welche direkt mit  $\alpha$  über eine Kante verknüpft sind.
- $N(\alpha)$  umfasst alle **Nachbarn** von  $\alpha$ .



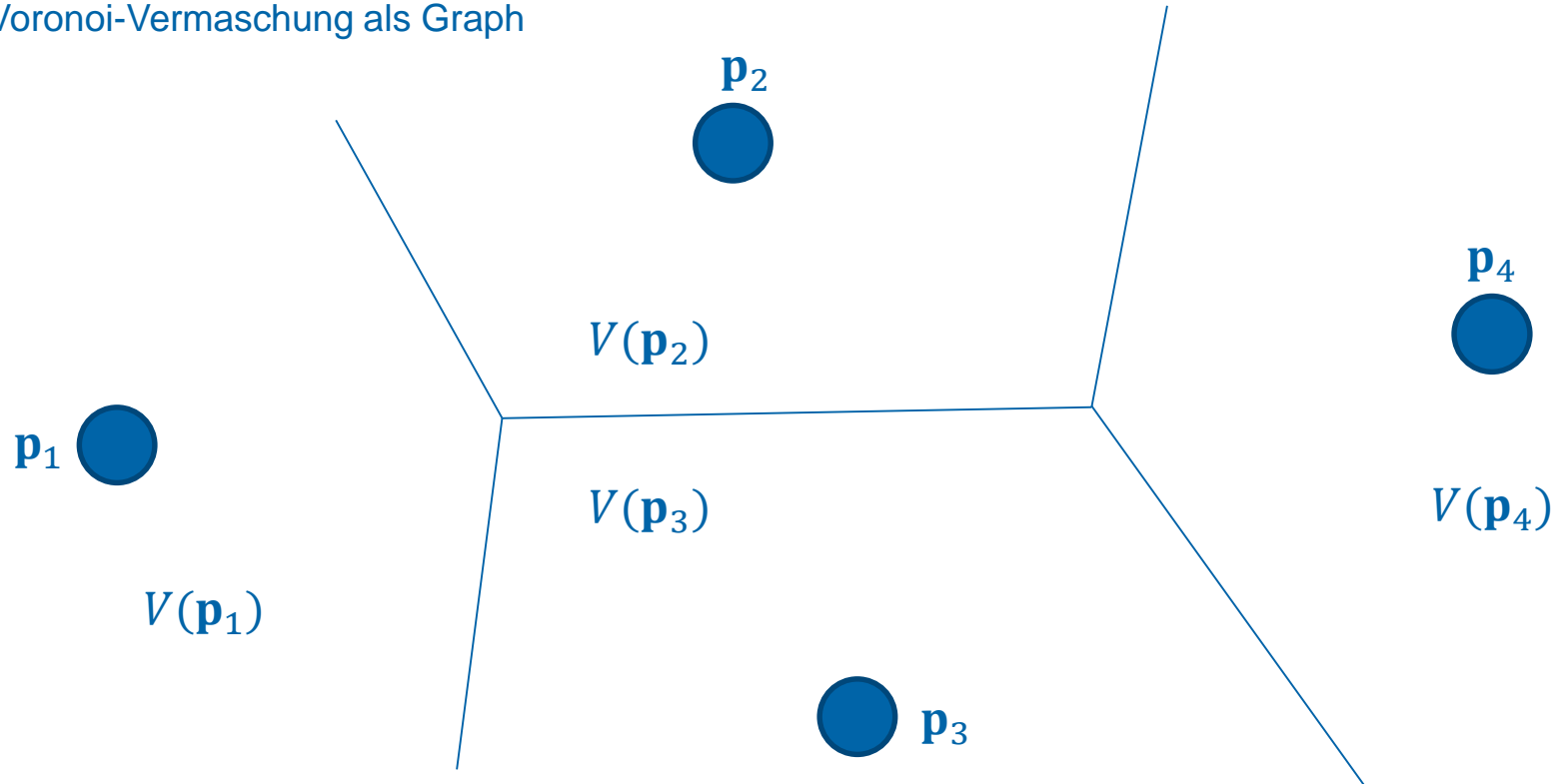
## Der $n$ D Graph $\mathcal{G}_n (\Omega, N)$ einer Vermaschung $\mathcal{T}$

- $\Omega$  umfasst alle Vertices (0-Zellen) von  $\mathcal{T}$
- Die Kanten von  $\mathcal{G}$  entsprechen den 1-Zellen (Kanten) der Vermaschung, welche die Vertices verbinden.
- $N(\alpha)$  umfasst für einen Vertex  $\alpha$  alle Vertices aus  $\mathcal{T}$ , welche mit  $\alpha$  über eine 1-Zelle/Kante verbunden sind.

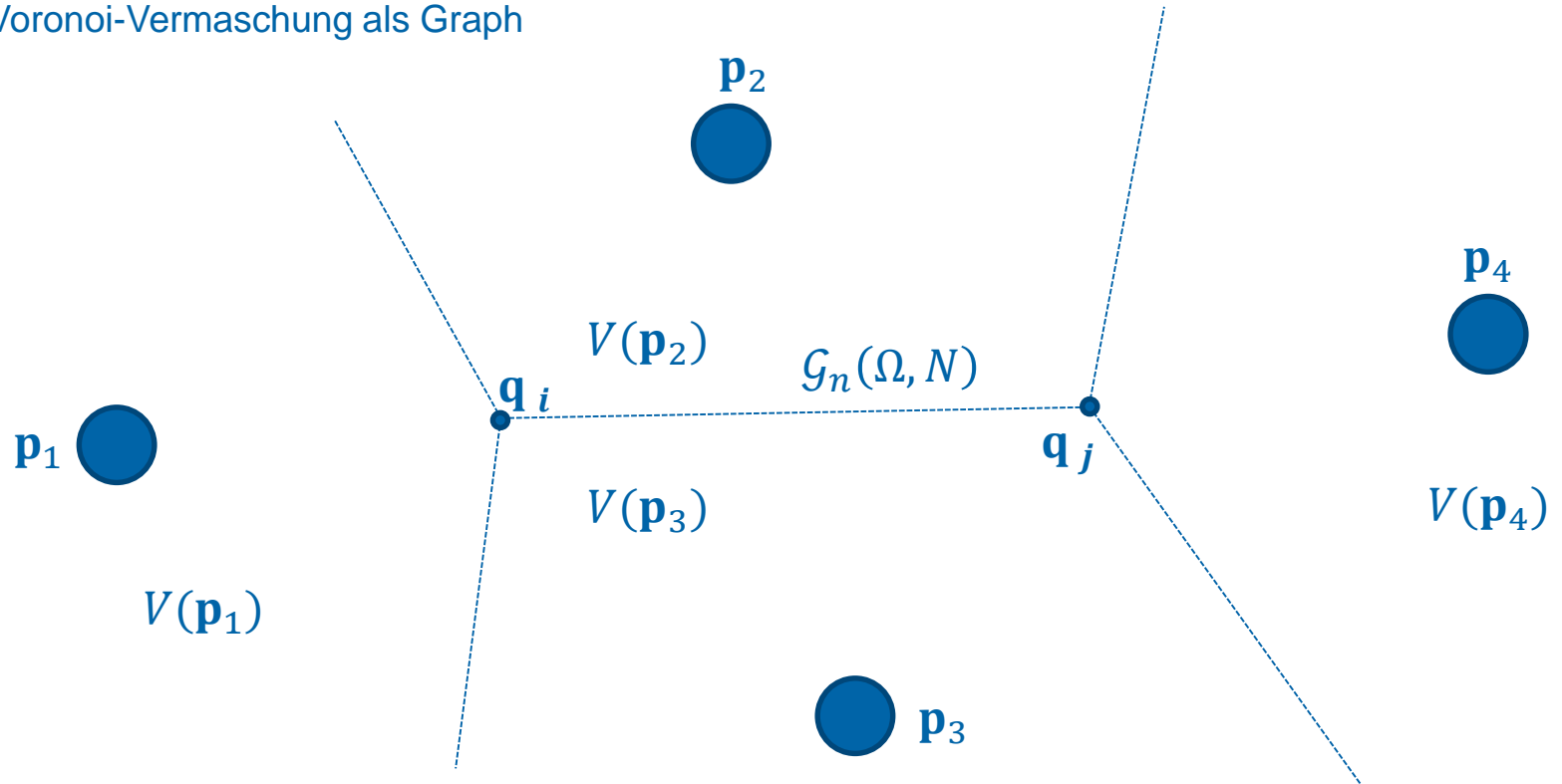
## Der duale Graph $\mathcal{G}_n^*(\Omega, N)$ einer Vermaschung $\mathcal{T}$

- Der Graph  $\mathcal{G}_n^*(\Omega, N)$  ist genau dann **dual** zu einem Graphen  $\mathcal{G}_n(\Omega, N)$ , wenn jeder  $i$ -Zelle  $C \in \mathcal{G}$  genau eine  $(n - i)$ -Zelle  $C^* \in \mathcal{G}_n^*(\Omega, N)$  zugeordnet wird und umgekehrt.

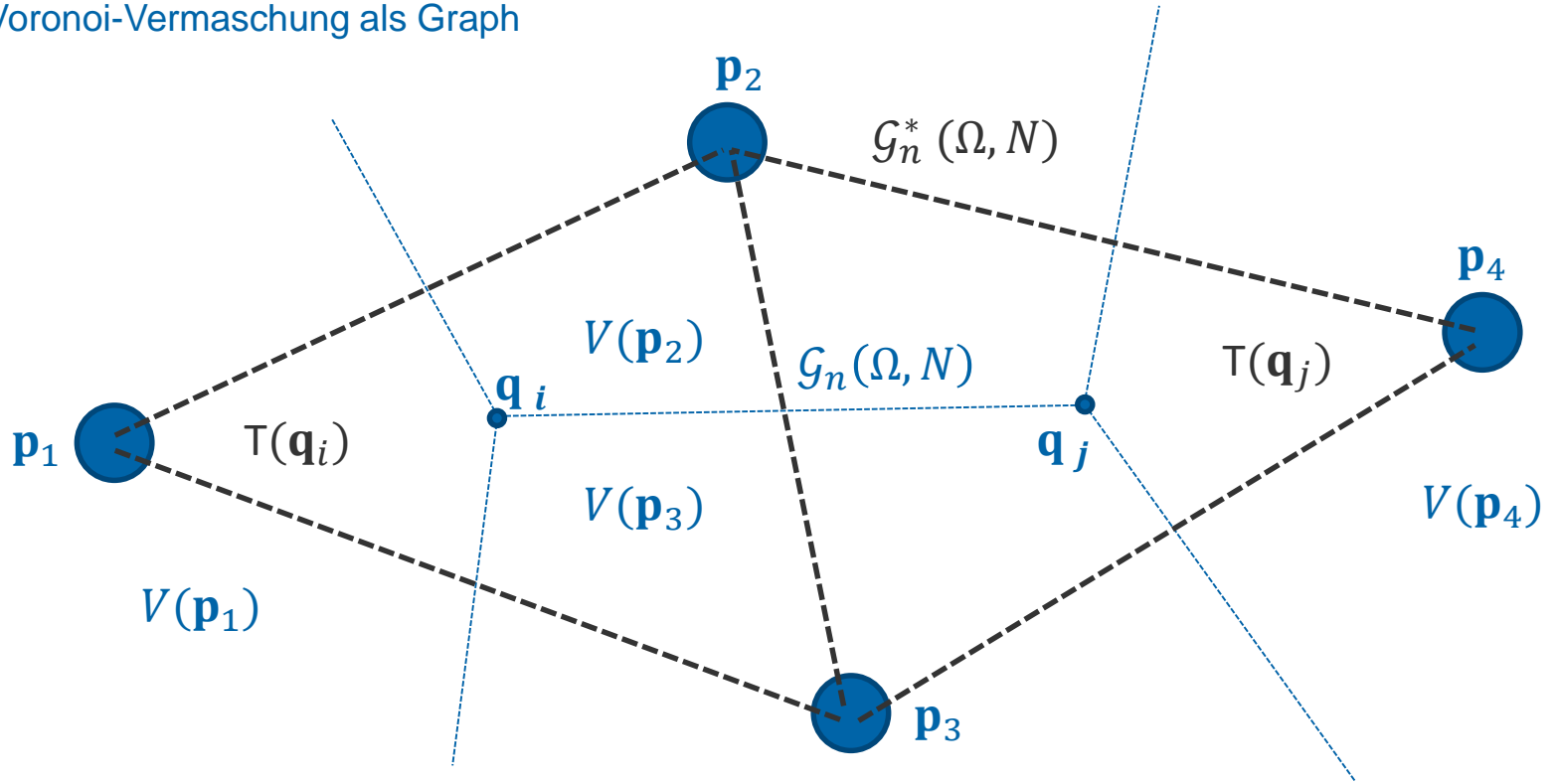
## Die Voronoi-Vermaschung als Graph



## Die Voronoi-Vermaschung als Graph

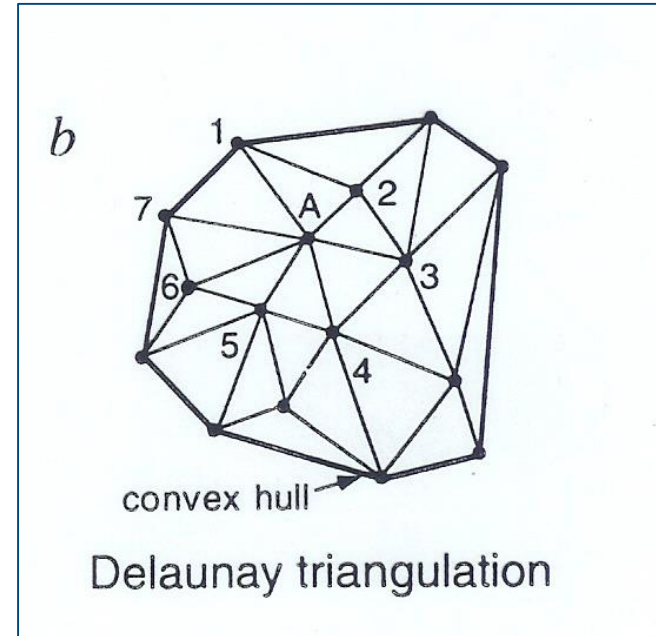
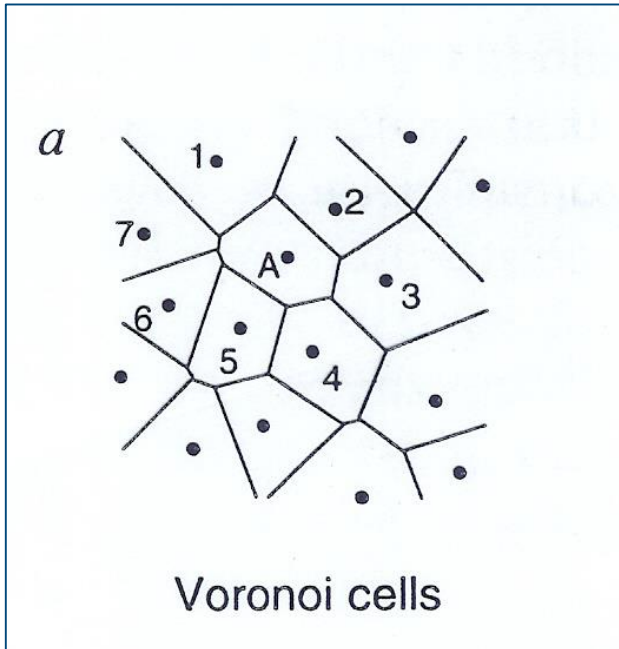


# Die Voronoi-Vermaschung als Graph



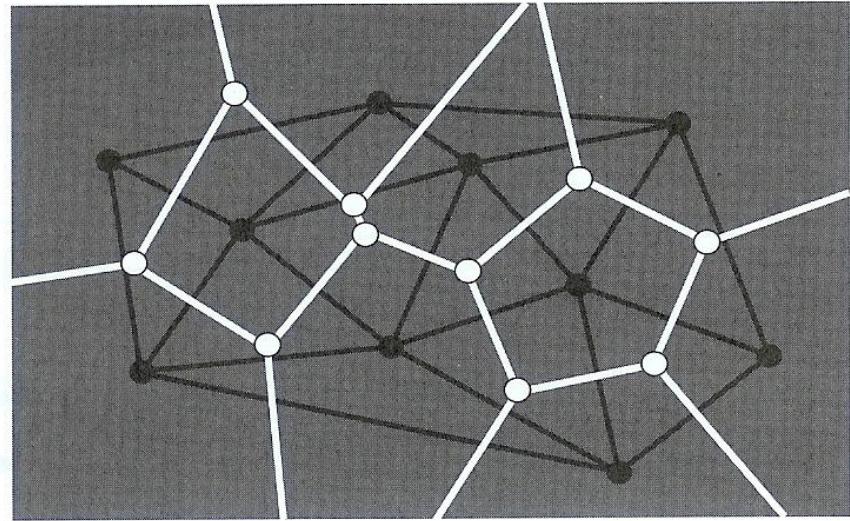
# Der *duale* Graph einer Voronoi-Vermaschung

## Delaunay-Triangulation



# Der *duale* Graph einer Voronoi-Vermaschung

Delaunay-Triangulation



**Figure 3.1** An example of a 2-dimensional Voronoi's diagram (in white) and its associated Delaunay triangulation (in black). The Voronoi regions are represented in light grey. The Delaunay points are represented by black points, while the Voronoi points are represented by white points.

# Delaunay-Triangulation/-vermaschung

Die duale Vermaschung  $\mathcal{V}^*(P)$  der Voronoi-Vermaschung  $\mathcal{V}(P)$  wird als **Delaunay-Vermaschung**  $\mathcal{D}(P)$  bezeichnet.

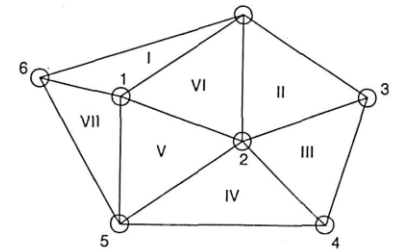
Es handelt sich um eine Triangulation, da alle  $n$ -Zellen **simplizial** sind, das bedeutet:

- Alle  $n$ -Zellen bestehen aus  $(n + 1)$  0-Zellen und  $(n + 1)$   $(n - 1)$ -Zellen .
- Alle  $n$ -Zellen haben maximal  $(n + 1)$  natürliche Nachbarn.
  
- 2D: alle 2-Zellen sind Dreiecke
- 3D: alle 3-Zellen sind Tetraeder

# Möglicher Repräsentationsansatz

## Datenstruktur A

- Dreiecke als Basisobjekte beschrieben über die beteiligten Knoten
- Topologie wird über eine Liste der natürlichen Nachbarn vorgehalten
- Knotengeometrie (-koordinaten) liegen separat vor



METHOD A

NODE COORDINATES		
Node	X	Y
1	.	.
2	.	.
3	.	.
4	.	.
5	.	.
6	.	.
7	.	.

TRIANGLE TOPOLOGY		
Triangle	Nodes	Adjacent Triangles
I	1,6,7	VII,O,VI
II	2,7,3	VI,O,III
III	2,3,4	II,O,IV
IV	2,4,5	III,O,V
V	5,1,2	VII,VI,IV
VI	1,7,2	I,II,V
VII	6,1,5	O,I,V

O=Outside

METHOD B

NODE COORDINATES			
Node	X	Y	Pointer
1	.	.	1
2	.	.	6
3	.	.	12
4	.	.	.
5	.	.	.
6	.	.	.
7	.	.	.

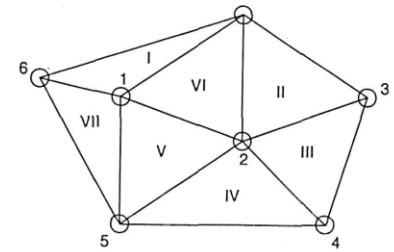
NODE COORDINATES	
Index	Connected Nodes
1	5
2	6
3	7
4	2
5	0 —
6	1
7	7
8	3
9	4
10	5
11	0 —
12	2
.	.
.	.

FIG. 3-13. TIN topology. **Method A.** The triangles are the basic spatial objects. Each triangle has topological attributes that describe the nodes and adjacent triangles. **Method B.** The nodes are the basic spatial objects. Each node is linked via a pointer to a table showing the directly-connected nodes, arranged in clockwise order. A zero (null) node is used to indicate the end of a string of connected nodes.

# Möglicher Repräsentationsansatz

## Datenstruktur B

- Bildet Dualität zur Voronoi-Vermaschung ab
- Knoten als Basisobjekte
- Jeder Knoten verweist auf eine Liste, die seine natürlichen Voronoi-Nachbarn in einer „angemessenen“ Reihenfolge (z.B. im/gegen Uhrzeigersinn) beinhaltet.



METHOD A

NODE COORDINATES		
Node	X	Y
1	.	.
2	.	.
3	.	.
4	.	.
5	.	.
6	.	.
7	.	.

TRIANGLE TOPOLOGY		
Triangle	Nodes	Adjacent Triangles
I	1,6,7	VII,O,VI
II	2,7,3	VI,O,III
III	2,3,4	II,O,IV
IV	2,4,5	III,O,V
V	5,1,2	VII,VI,IV
VI	1,7,2	I,II,V
VII	6,1,5	O,I,V

O=Outside

METHOD B

NODE COORDINATES			
Node	X	Y	Pointer
1	.	.	1
2	.	.	6
3	.	.	12
4	.	.	.
5	.	.	.
6	.	.	.
7	.	.	.

NODE COORDINATES	
Index	Connected Nodes
1	5
2	6
3	7
4	2
5	0 —
6	1
7	7
8	3
9	4
10	5
11	0 —
12	2
.	.
.	.

FIG. 3-13. TIN topology. **Method A.** The triangles are the basic spatial objects. Each triangle has topological attributes that describe the nodes and adjacent triangles. **Method B.** The nodes are the basic spatial objects. Each node is linked via a pointer to a table showing the directly-connected nodes, arranged in clockwise order. A zero (null) node is used to indicate the end of a string of connected nodes.

# Eigenschaften

Eine (Delaunay) Triangulation  $\mathcal{T}$  einer Menge von Punkten  $P$ , in der die natürlichen Voronoi-Nachbarn so verbunden sind, dass sie Dreiecke bilden, weist spezielle Eigenschaften auf:

- Die Grenze der der Delaunay Vermaschung  $\mathcal{D}(P)$  entspricht der konvexen Hülle der Punktmenge  $P$ .
  - $\mathcal{D}(P)$  ist eine endliche (*finite*) zellulare Zerlegung des Inneren dieser convexen Hülle.
  - Im  $\mathbb{R}^2$  ist die Delaunay-Vermaschung die Triangulation der konvexen Hülle, die den kleinsten Winkel eines jeden Dreiecks maximiert.
- Diese Eigenschaften können direkt für den Aufbau der Vermaschung genutzt werden!

# Konstruktive Delaunay-Triangulation

Gegeben ist eine Punktmenge  $P$  aus  $m$  eindeutigen nicht-kollinearen Punkten  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ .

Eine Triangulation  $\mathcal{T}$  von  $P$  besteht aus einer Menge von Punkt-Tripeln  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ , für die gilt:

- Jedes Tripel beschreibt ein nicht-degeneriertes Dreieck.
- Kein Dreieck beinhaltet einen weiteren Punkt  $\mathbf{p}_l \in P$ .
- Die Schnittmenge zweier Dreiecke ist leer,  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) \cap (\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_n) = \emptyset$ .
- Die Vereinigung aller Dreiecke bildet die konvexe Hülle von  $P$ .

➤ Jede Triangulation ist eine Zerlegung der konvexen Hülle von  $P$  in Dreiecke.

## ***Euler-Poincaré Theorem***

Für jede zellulare Zerlegung  $\mathcal{P}(A)$  eines manigfaltigen (eng. manifold) Objektes  $A$  ist die Euler- Poincaré Charakteristik  $\chi(A)$ , definiert über

$$\chi(A) = \sum_{C \in \mathcal{P}(A)} (-1)^{\dim(C)} \quad \text{oder} \quad \chi(A) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot |\mathcal{P}_i(A)|$$

, unabhängig von  $\mathcal{P}(A)$ .

$|\mathcal{P}_i(A)|$  ist die Anzahl aller Zellen in  $\mathcal{P}$  mit topologischer Dimension  $i$ .

## Euler-Poincaré Theorem

Für eine zweidimensionale Fläche:

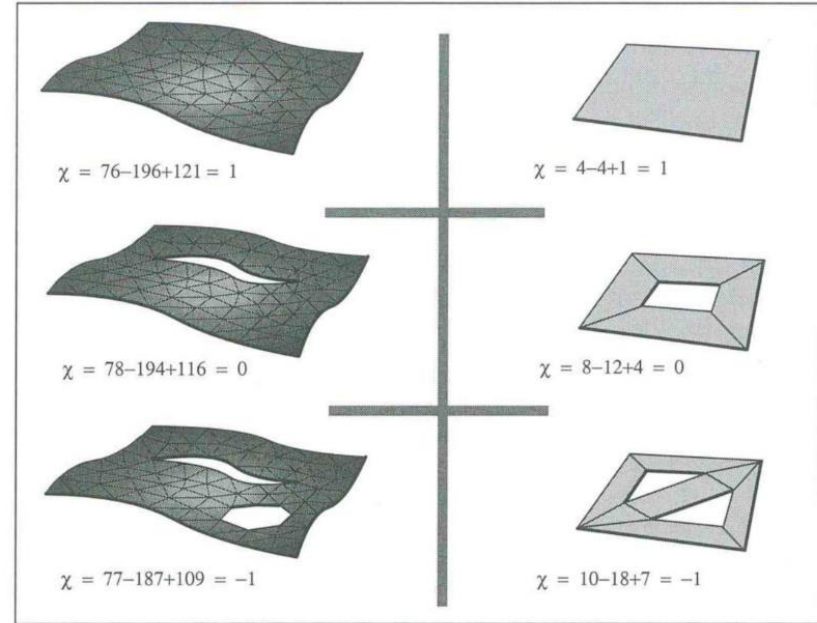
$$\chi = V - E + F = 2 - n_{\text{boundary}}$$

$V$ : Anzahl der Vertices

$E$ : Anzahl der Kanten

$F$ : Anzahl der Flächenelemente

$n_{\text{boundary}}$  : Anzahl der Grenzen



**Figure 2.12** Examples of cellular partitions of open surfaces: the Euler-Poincaré characteristic  $\chi = V - E + F$  is equal to 2 minus the number of boundaries whatever the cellular partition.

Eine Punktmenge  $P$  lässt sich nicht eindeutig triangulieren, basierend auf dem *Euler-Poincaré Theorem* lässt sich aber Folgendes feststellen:

$$F = 2m - n_{bp} - 2$$

$$E = 3m - n_{bp} - 3$$

$$m - 1 \leq F \leq 2m - 5$$

$$3m - 3 \leq E \leq 3m - 6$$

Mit  $n_{bp}$ : Anzahl der Punkte auf der konvexen Hülle von  $P$ .

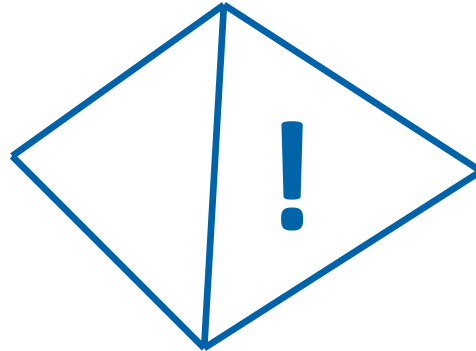
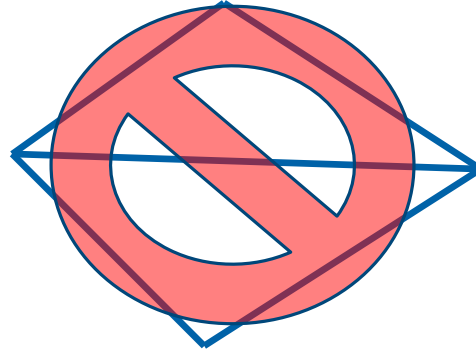
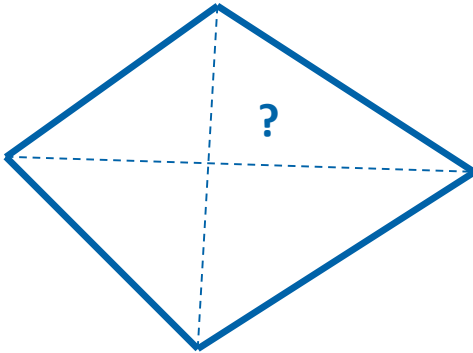
# Triangulationskriterien

Eine eindeutige Triangulation benötigt zusätzliche Modellannahmen oder Auswahlkriterien.

- Kriterien beziehen sich auf die Triangulation eines konvexen Vierecks.
- Ziel: Erstellte Dreiecke sollen global so gleichförmig wie möglich sein,
  - d.h. gleichseitig (equi-lateral) oder gleichwinklig (equi-angular)
  - Vermeidung von Dreiecke mit extremen Winkeln

⇒ Optimierungsproblem: Minimiere maximalen Winkel (max-min Kriterium) oder maximiere minimalen Winkel (min-max Kriterium) aller Dreiecke.

# Triangulationskriterien

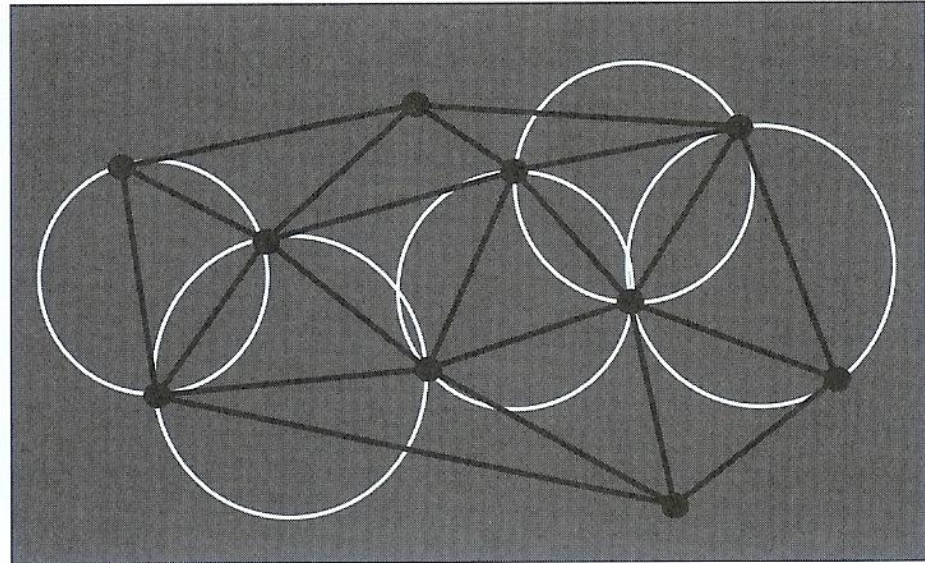


## Triangulationskriterien

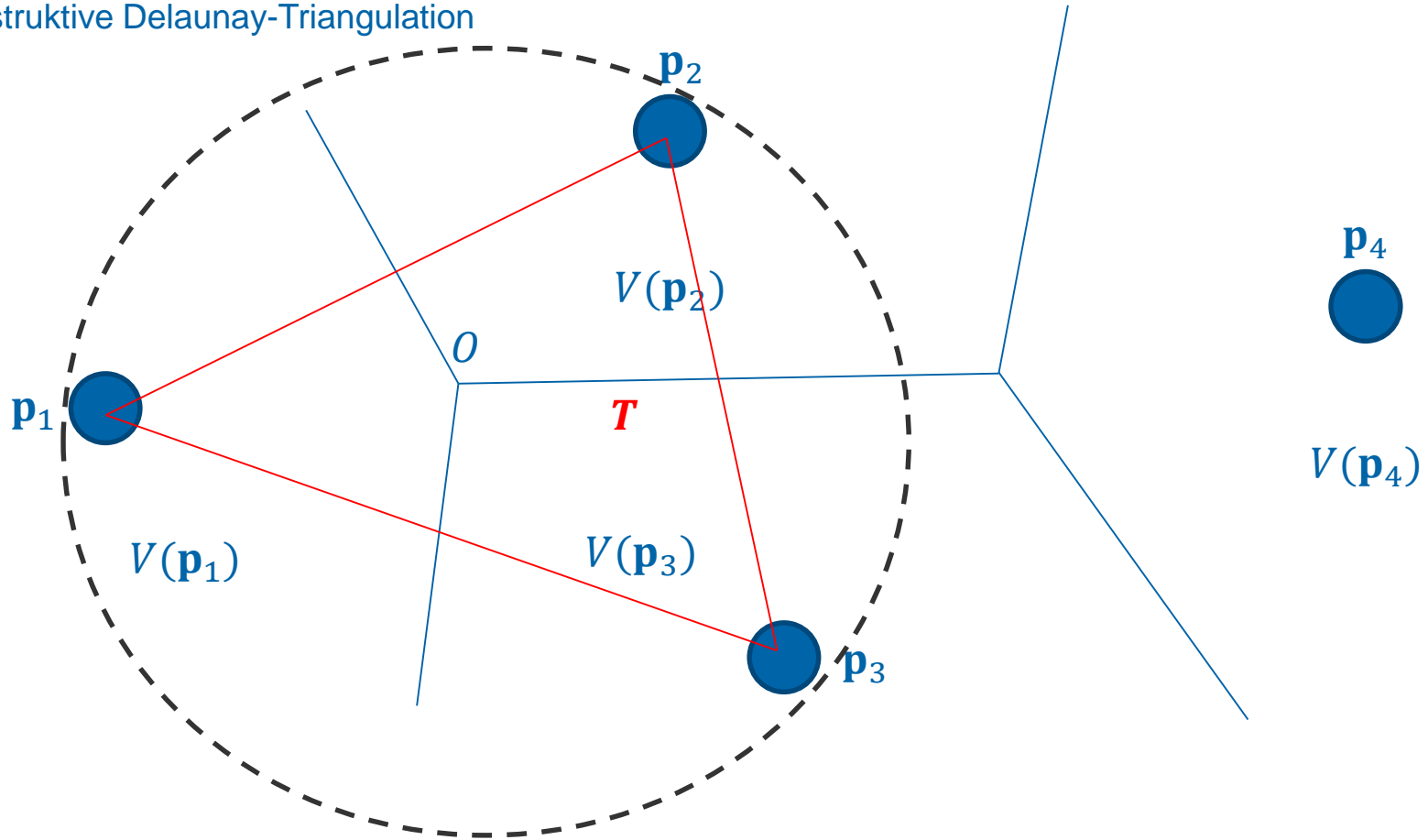
- Maximierung des kleinsten der 6 Winkel in 2 Dreiecken (*max-min*: Delaunay)
- Minimierung des größten der 6 Winkel in 2 Dreiecken (*min-max*)
  
- Triangulation entlang der kürzesten Diagonale in jedem konvexen Viereck
- Triangulation entlang der längsten Diagonale in jedem konvexen Viereck
- ...
  
- Eine Triangulation, bestehend aus  $n$ D Simplizes, deren Vertices den Punkten aus  $P$  entsprechen, ist genau dann die Delaunay-Triangulation dieser Punkte, wenn die Umkugel jedes  $n$ -Simplex  $T$  keinen anderen Punkt aus  $P$  außer den Vertices von  $T$  enthält.

Die  $n$ D-Umkugel eines Dreiecks im  $\mathbb{R}^n$  ist die eindeutige  $n$ -Kugel, welche durch alle drei Vertices verläuft.

Ihr Zentrum  $O$  ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Dreieckskanten.



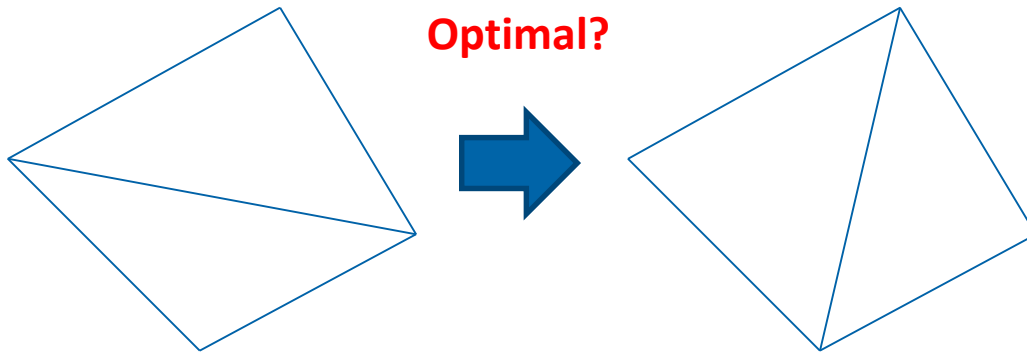
**Figure 3.2** *An example of a 2-dimensional Delaunay triangulation (in black): the circumcircle (in white) of any Delaunay triangle does not contain any other vertex.*



# Lokale Optimalität

Eine Triangulation wird als *lokal optimal* bezeichnet, wenn jedes strikt konvexe Viereck bezüglich des gewählten Kriteriums optimal trianguliert wurde.

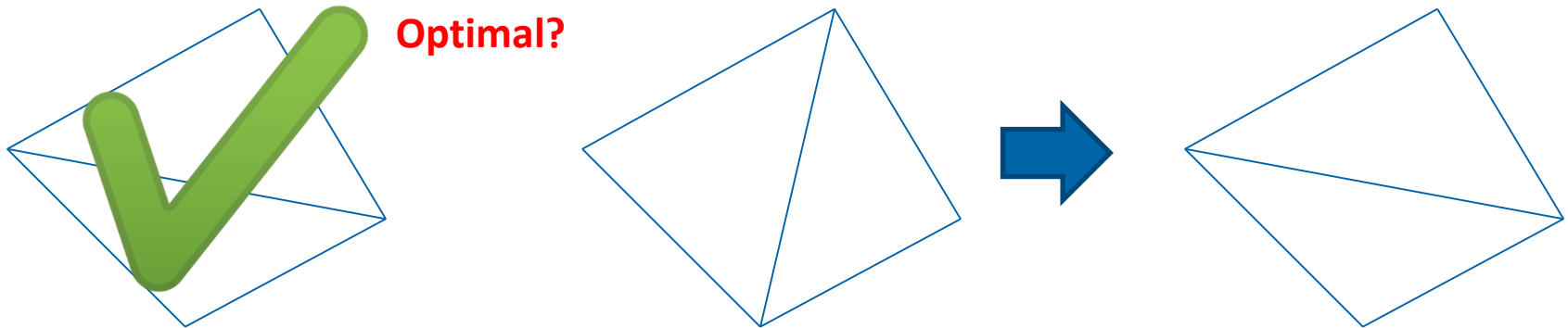
Diagonalen-Tausch-Test:



# Lokale Optimalität

Eine Triangulation wird als *lokal optimal* bezeichnet, wenn jedes strikt konvexe Viereck bezüglich des gewählten Kriteriums optimal trianguliert wurde.

Diagonalen-Tausch-Test:



## Globale Optimalität

Um konstruktiv zu entscheiden, ob eine Triangulation *global optimal* ist, ist ein Maß notwendig, um mehrere *lokal optimale* Triangulationen miteinander zu vergleichen

$a(T), T \in \mathcal{T}$ , ist ein Maß für die Form eines einzelnen Dreiecks. Der Vektor

$$a(\mathcal{T}) = (a_1, \dots, a_N), a_i = a(T_i), T_i \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, N$$

wird einer Triangulation  $\mathcal{T}$  zugeordnet, die Komponenten  $a_i$  sind aufsteigend sortiert und beschreiben z.B. den Kleinsten der drei Winkel.

## Globale Optimalität

Eine Triangulation  $\mathcal{T}_1$  wird als „besser“ (eng. superior) bzgl. eines Maßes  $a$  als eine Triangulation  $\mathcal{T}_2$  bezeichnet, wenn gilt:  $a(\mathcal{T}_1) > a(\mathcal{T}_2)$

Der Operator  $>$  bedeutet hier *lexikografische Reihenfolge*:

Für zwei Vektoren  $a$  und  $b$  bedeutet  $a < b$ , dass eine Zahl  $m < N$  existiert, für die gilt:  $a_i = b_i, i = 1, \dots, m - 1$  und  $a_m < b_m$

## Globale Optimalität

Eine Triangulation  $\mathcal{T}^*$  einer Punktmenge  $P$  ist *global optimal* bzgl. eines Maßes  $a$ , wenn  $a(\mathcal{T}^*) \geq a(\mathcal{T})$  für alle Triangulationen  $\mathcal{T}$  von  $P$ . D.h. es existiert kein lexikografisch größerer Vektor  $a$ .

Diese Definitionen setzen voraus, dass die Gesamtzahl der möglichen Triangulationen **endlich** ist.

## Lokale vs globale Optimalität

Jede *global optimale* Triangulation ist immer auch *lokal optimal*. Der umgekehrte Fakt gilt jedoch nicht in jedem Fall.

Im Falle von Triangulationen nach dem max-min-Kriterium ist jedoch die *lokal optimale* Triangulation auch *global optimal*! Es ist kein anderes Kriterium bekannt, für welches das ebenfalls gilt.

## Lokale vs globale Optimalität

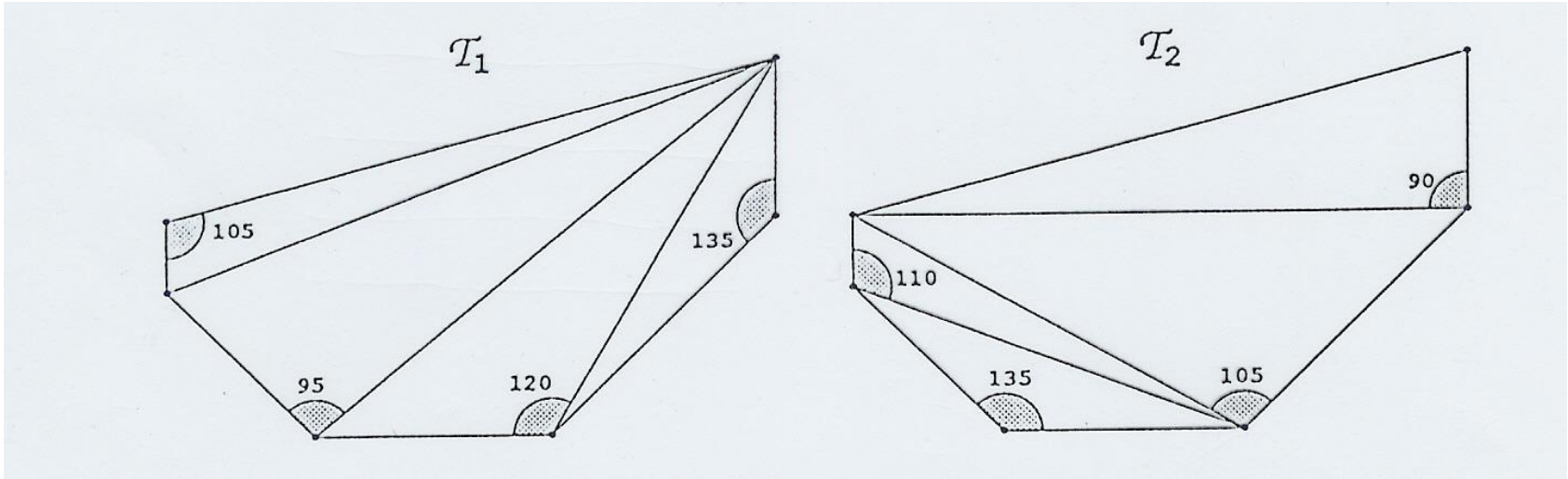
Gegenbeispiel für das min-max-Kriterium:

$a(T)$ : größter Winkel eines Dreiecks  $T$

Für  $a(\mathcal{T}) = \max \left\{ \frac{1}{a(T)}, T \in \mathcal{T} \right\}$  gilt dann:

Wenn für zwei Triangulationen  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  eines strikt konvexen Vierecks  $a(\mathcal{T}_1) > a(\mathcal{T}_2)$  gilt, ist  $\mathcal{T}_1$  die „bessere“ Triangulation.

# Lokale vs globale Optimalität



$$a(\mathcal{T}_1) := \left( \frac{1}{135}, \frac{1}{120}, \frac{1}{105}, \frac{1}{95} \right); \quad a(\mathcal{T}_2) := \left( \frac{1}{135}, \frac{1}{110}, \frac{1}{105}, \frac{1}{90} \right)$$

$\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  sind *lokal optimal*, wegen  $a(\mathcal{T}_2) > a(\mathcal{T}_1)$  ist aber nur  $\mathcal{T}_2$  *global optimal*.

# Delaunay-Triangulation ...

- Duale Triangulation zur Voronoi-Vermaschung ...
  - lokal optimal bzgl. max-min Kriterium **UND**
  - global optimal bzgl. max-min Kriterium.

Diese Eigenschaften können genutzt werden, um einen effizienten Triangulationsalgorithmus zu entwerfen, der damit beginnt, sukzessive jedes strikt konvexe Viereck *lokal optimal* zu triangulieren und dadurch ohne zusätzliche Maßnahmen eine *global optimale* Triangulation zu erhalten.

Es lassen sich drei Typen von Algorithmen ableiten ...

## Delaunay-Triangulation - Algorithmen

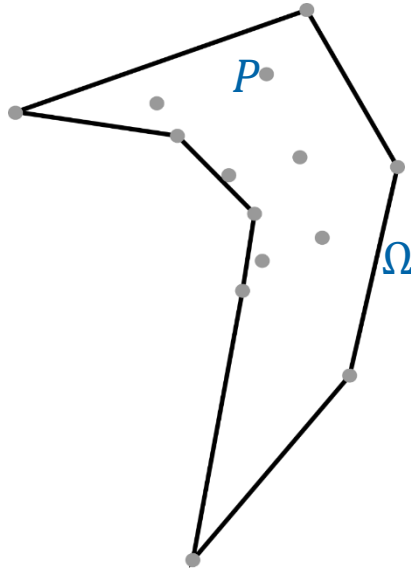
**Typ A:** Überprüfung jedes Vierecks einer gegebene Triangulation, ob das max-min Kriterium erfüllt ist; wenn nicht, wird die Diagonale vertauscht (engl. *swapped*).

**Typ B:** Initialisierung mittels eines Dreieck; sukzessives Hinzufügen weiterer Punkte und Triangulierung jedes strikt-konvexen Viereck nach dem max-min-Kriterium. Die dadurch entstehende Triangulation ist immer global optimal.

**Typ C:** Unterteilung des Datenraums  $D$  in kleinere Unterräume. Diese werden lokal-optimal trianguliert (max-min). Dann werden die Untertriangulationen so zusammen gefügt, dass die lokale Optimalität erhalten bleibt.

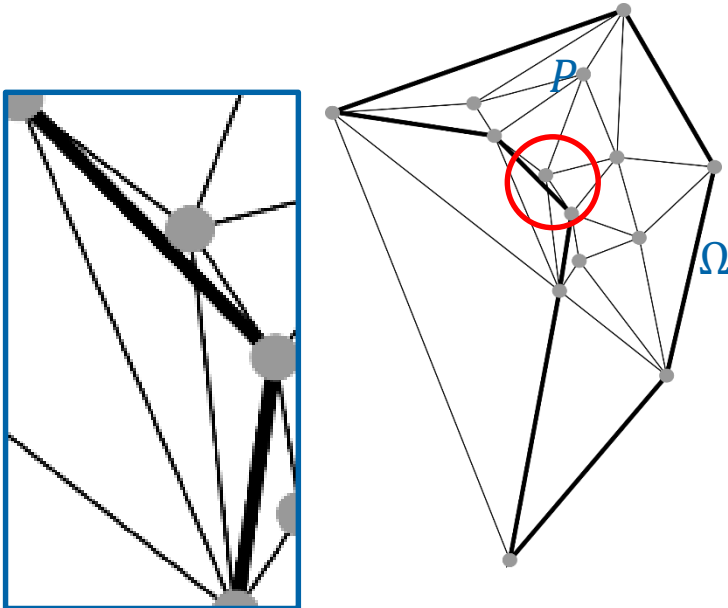
# Constrained Delaunay Triangulation

Ein häufiges Problem ist die Triangulation einer Punktmenge  $P$  innerhalb ihres bekannten, nicht-konvexen Grenzpolygons  $\Omega$ :



# Constrained Delaunay Triangulation

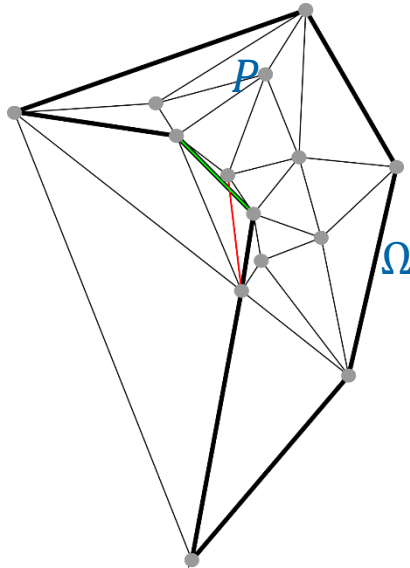
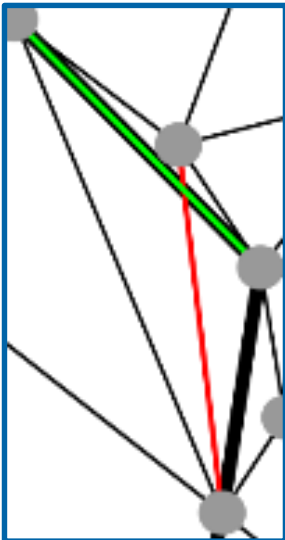
Ein häufiges Problem ist die Triangulation einer Punktmenge  $P$  innerhalb ihres bekannten, nicht-konvexen Grenzpolygons  $\Omega$ :



- Kanten des Grenzpolygons sollen erhalten bleiben ...
- Klassische Delaunay Triangulation entspricht nicht immer den gegebenen Kanten ...

# Constrained Delaunay Triangulation

Ein häufiges Problem ist die Triangulation einer Punktmenge  $P$  innerhalb ihres bekannten, nicht-konvexen Grenzpolygons  $\Omega$ :



- Kanten des Grenzpolygons sollen erhalten bleiben ...
- Klassische Delaunay Triangulation entspricht nicht immer den gegebenen Kanten ...

## Constrained Delaunay Triangulation

Für manche Anwendungen existieren s.g. „a priori“ Informationen zur natürlichen Nachbarschaftsbeziehung in  $P$ , entweder

- Beruhend auf der Natur des Problems oder
- Als allgemeine Zusatzinformationen.

Weitere Beispiele:

- Digitalisierte Konturlinien konstanter Höhe; adjazente Punkte entlang der Linien sind natürliche Nachbarn.
- Störungslinien (Diskontinuitäten); adjazente Punkte auf der gleichen Seite der Linie sind natürliche Nachbarn, aber keine Nachbarschaft über die Linie hinweg.

## Constrained Delaunay Triangulation

Die „a priori“ Nachbarschaften äußern sich in vorgegebenen Kanten, welche die Triangulation berücksichtigen muss.

- **Grenzpolygon:** Kanten des Grenzpolygons müssen erhalten bleiben
- **Konturlinien:** Linien bilden Kantenzüge, welche beibehalten werden müssen
- **Störungen:** Es darf keine Kanten geben, welche die Störung kreuzen. D. h. die Störung selbst muss als Kantenzug berücksichtigt werden

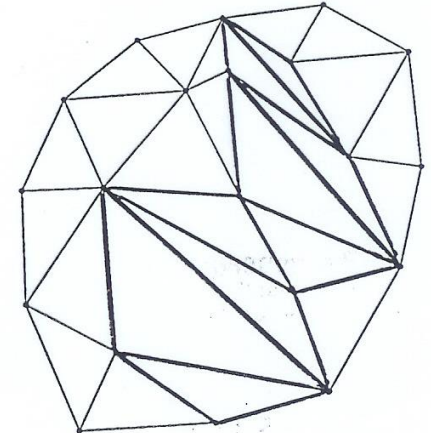
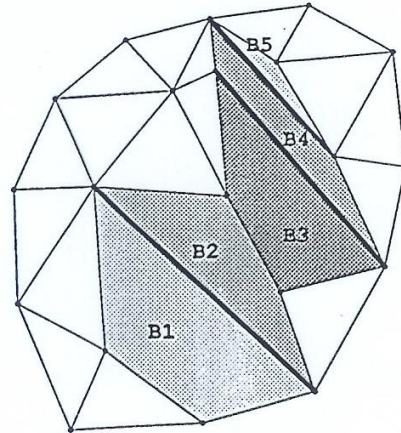
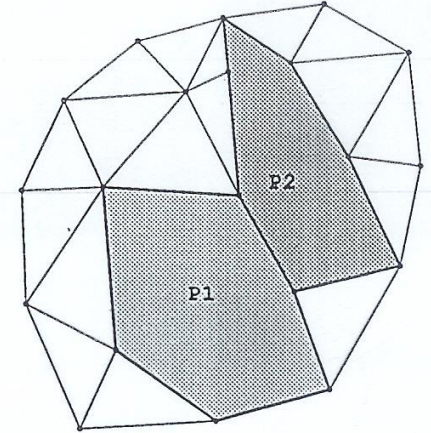
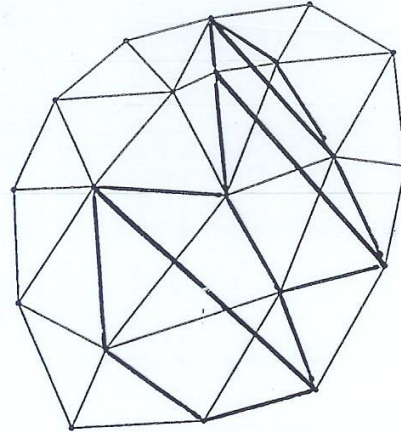
Dadurch kann später eine lineare Interpolation über die gegebenen Linien vermieden werden.

## Constrained Delaunay Triangulation

Die zusätzlichen Randbedingungen können durch eine Delaunay Triangulation einfach berücksichtigt werden:

Lokal optimale Triangulation wird überall angestrebt, solange die vorgegebenen Kanten dem nicht widersprechen. Beziehungsweise wird lokale Optimalität bzgl. der gegebenen Kanten hergestellt, indem diese Kanten immer „Randkanten“ zu triangulierender Vierecke sind.

# Constrained Delaunay-Triangulation

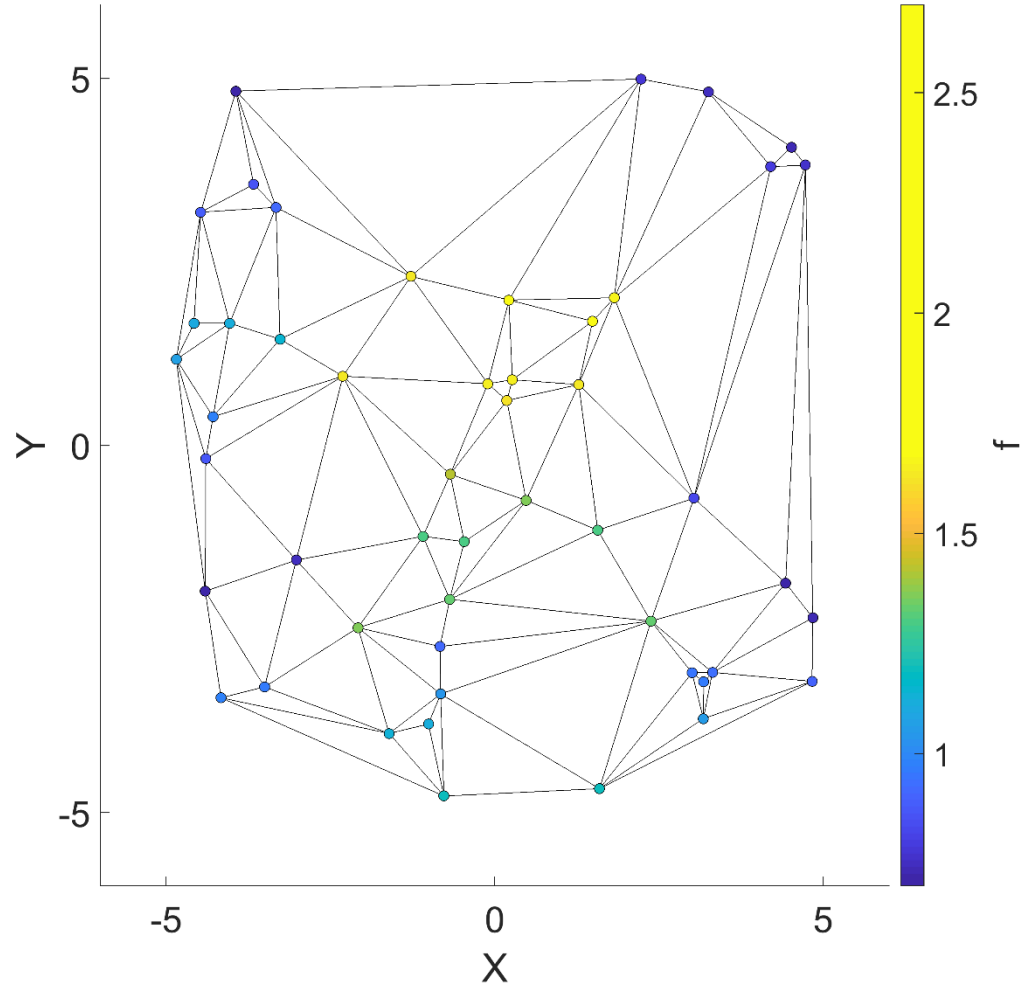


## Modellannahme:

Ein vorhergesagter Wert für eine Position  $\mathbf{p}$  ist linear abhängig von den Parameterwerten an den Eckpunkten des Dreiecks, in dem sich  $\mathbf{p}$  befindet.

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{t=i,j,k} w_t * f_t(\mathbf{p}_t)$$

$$\mathbf{p} \in T = \{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k\}$$

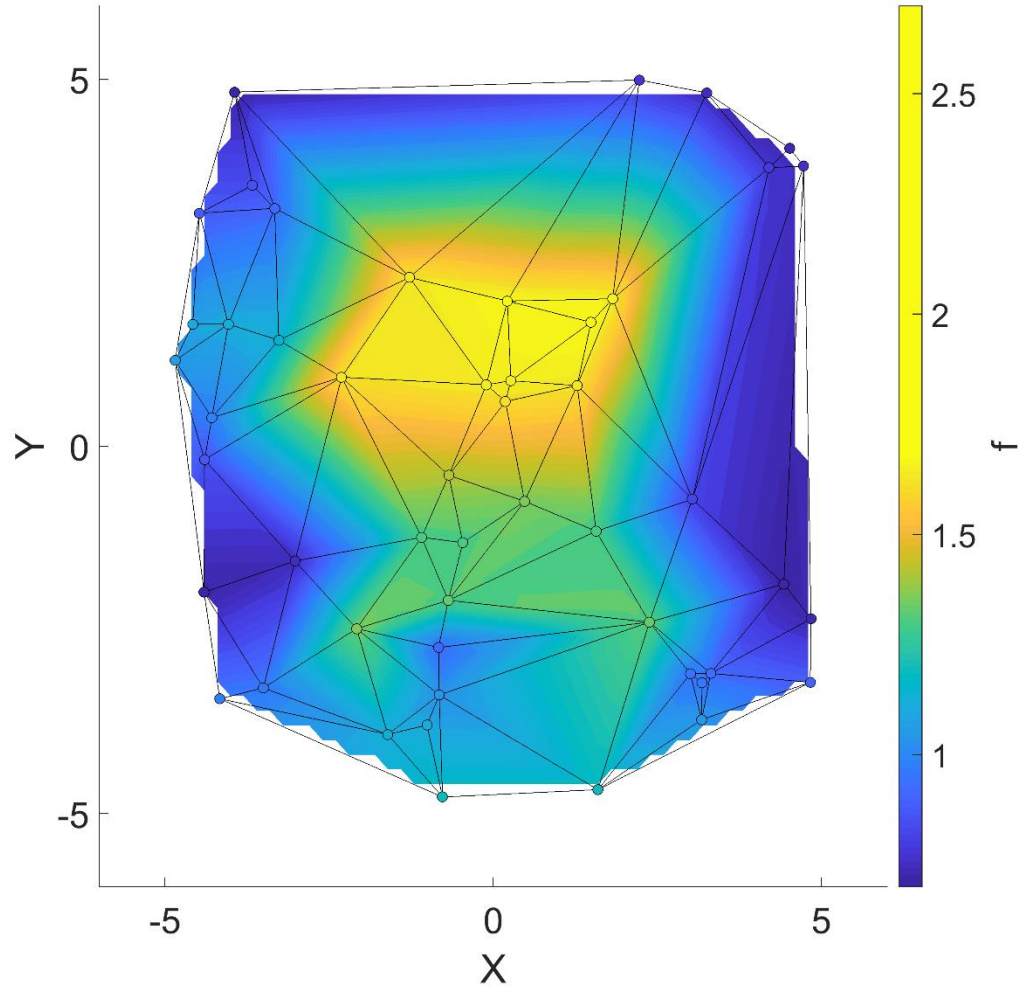


## Modellannahme:

Ein vorhergesagter Wert für eine Position  $\mathbf{p}$  ist linear abhängig von den Parameterwerten an den Eckpunkten des Dreiecks, in dem sich  $\mathbf{p}$  befindet.

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{t=i,j,k} w_t * f_t(\mathbf{p}_t)$$

$$\mathbf{p} \in T = \{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k\}$$

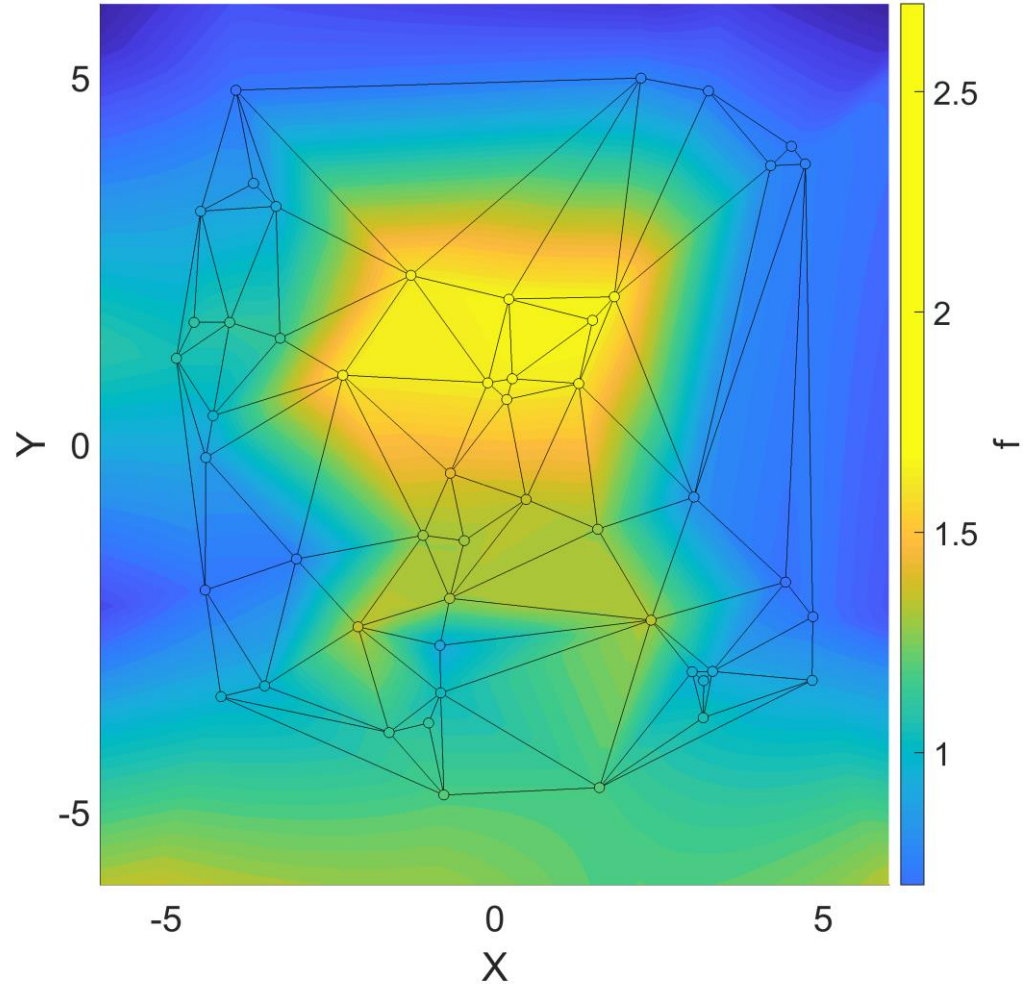


## Modellannahme:

Ein vorhergesagter Wert für eine Position  $\mathbf{p}$  ist linear abhängig von den Parameterwerten an den Eckpunkten des Dreiecks, in dem sich  $\mathbf{p}$  befindet.

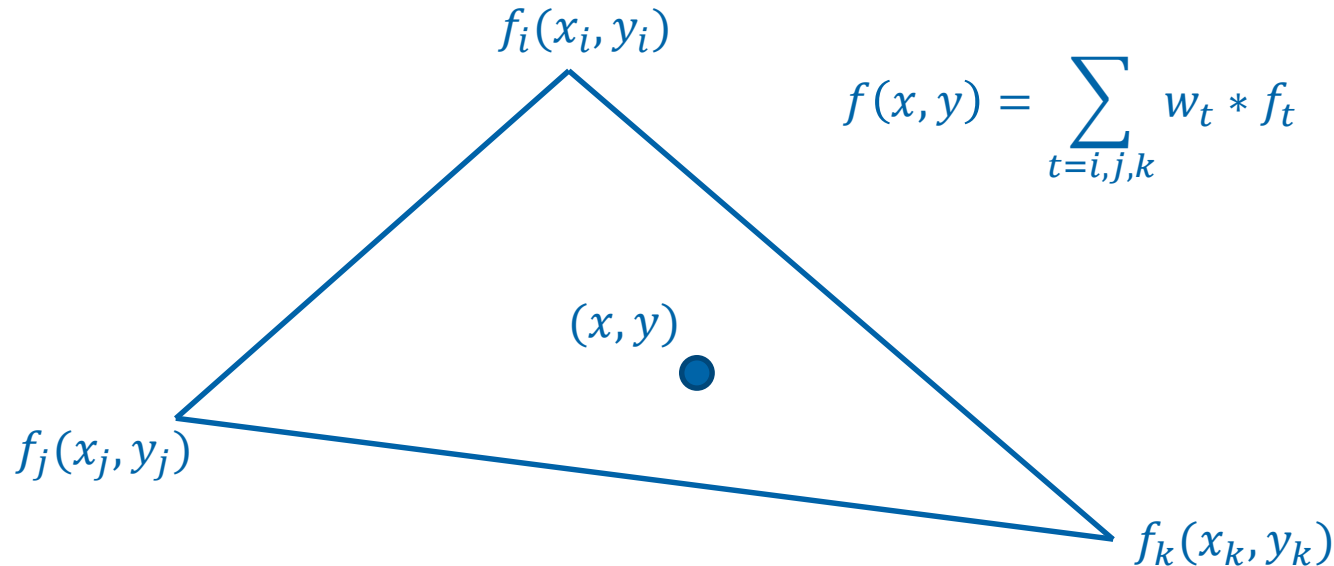
$$f(\mathbf{p}) = \sum_{t=i,j,k} w_t * f_t(\mathbf{p}_t)$$

$$\mathbf{p} \in T = \{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k\}$$



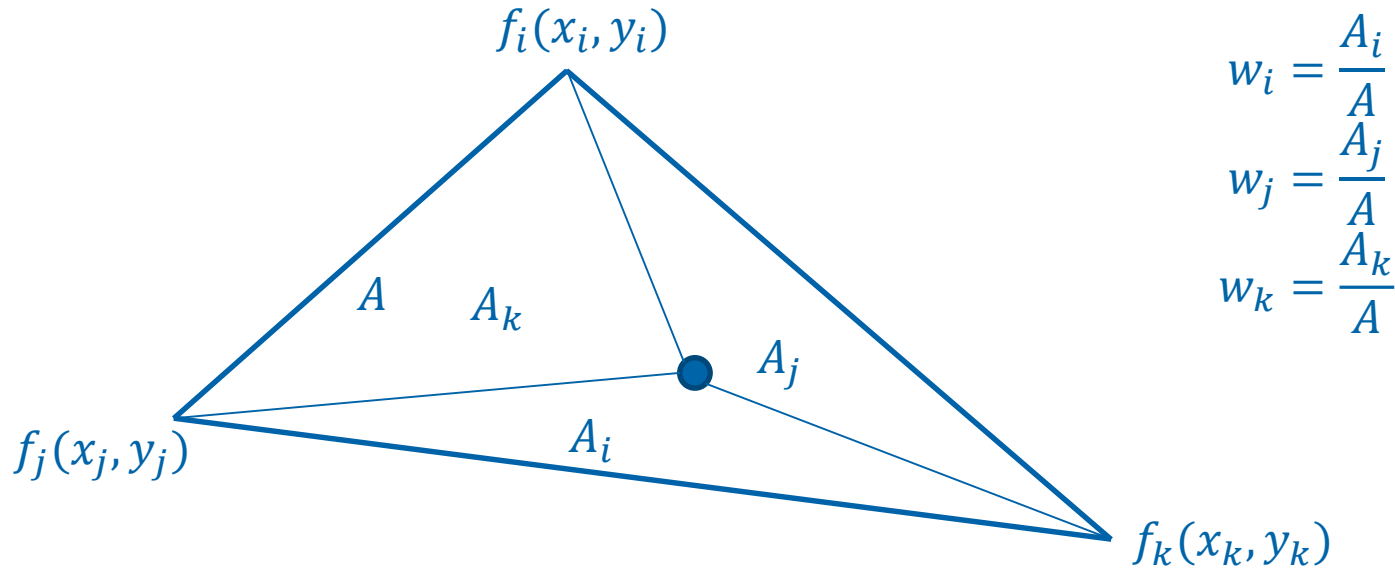
# Lineare Interpolation über Dreiecken

An den drei Eckpunkten eines Dreiecks sind Parameterwerte bekannt. Wie kann der Parameterwert an einem Punkt im Dreieck berechnet werden?



# Lineare Interpolation über Dreiecken

Die Nachbarschaftsbeziehung wird durch die Triangulation festgelegt. Die Gewichte  $w = \{w_i, w_j, w_k\}$  lassen sich über Flächenverhältnisse bestimmen:



# Lineare Interpolation mit baryzentrischen Koordinaten

Die Gewichte  $w = \{w_i, w_j, w_k\}$  werden als baryzentrische Koordinaten eines beliebigen Punktes  $\mathbf{p} \in T = \{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k\} \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{p}(x, y)$ .

$$A = \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_i = \left| \det \begin{pmatrix} x & x_j & x_k \\ y & y_j & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|; A_j = \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x & x_k \\ y_i & y & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|; A_k = \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j & x \\ y_i & y_j & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow A = |(x_i - x_j)(y_j - y_k) + (x_j - x_k)(y_i - y_j)| \text{ (Cramersche Regel)}$$

# Lineare Interpolation mit baryzentrischen Koordinaten

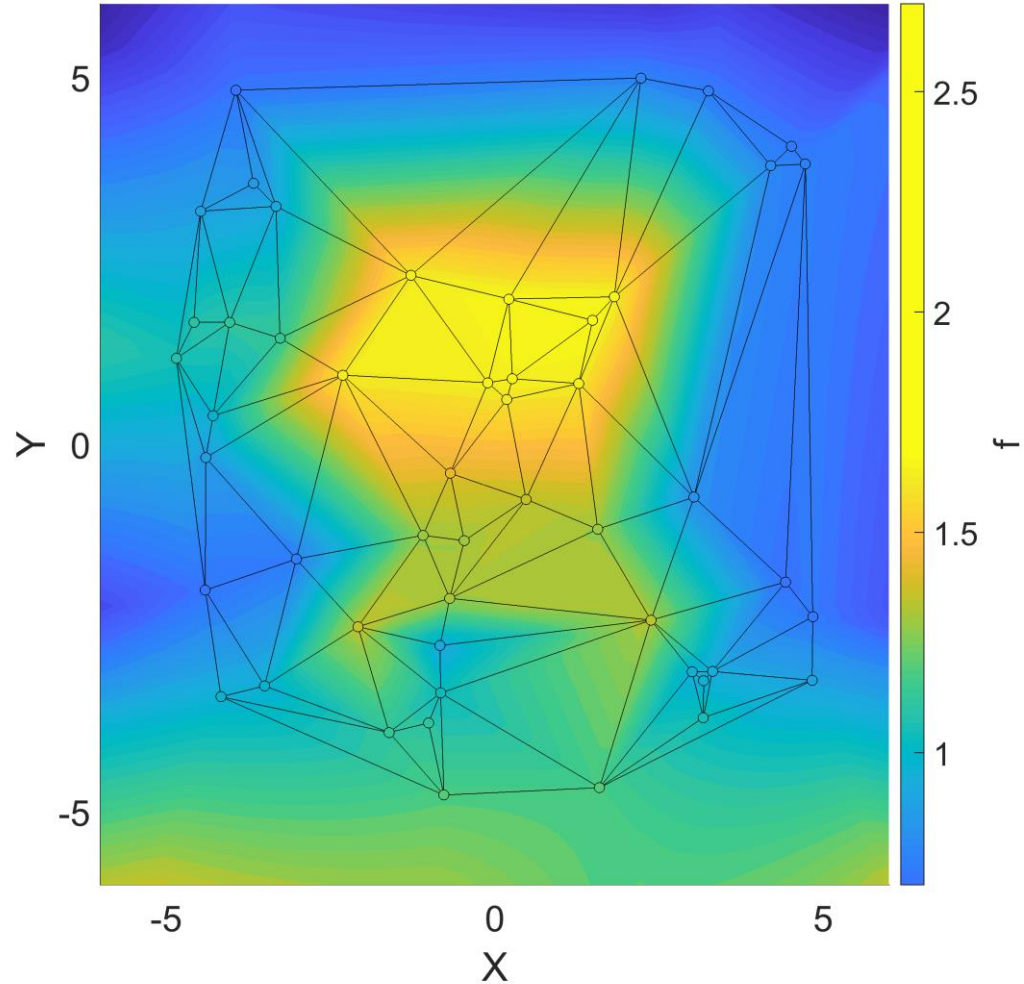
Es gilt:

- $\sum_{t=i,j,k} w_t = 1.$
- Die baryzentrischen Koordinaten von  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(x_i, y_i)$  lauten  $(1,0,0)$ .
- Ein Punkt mit dem baryzentrischen Koordinaten  $(0, v, 1 - v)$  liegt auf der Kante zwischen  $\mathbf{p}_j$  und  $\mathbf{p}_k$ . Die Kante wird geteilt bzgl. des Verhältnisses  $\frac{1-v}{v}$ .

## Lineare Interpolation über Dreiecken

### Eigenschaften:

- $f(x, y) = \sum_{t=i,j,k} w_t f_t$ :  
Interpolant ist stück-weise linear, die erste Ableitung ist **NICHT** stetig über den Dreieckskanten.



# Lineare Interpolation mit baryzentrischen Koordinaten

Eigenschaften:

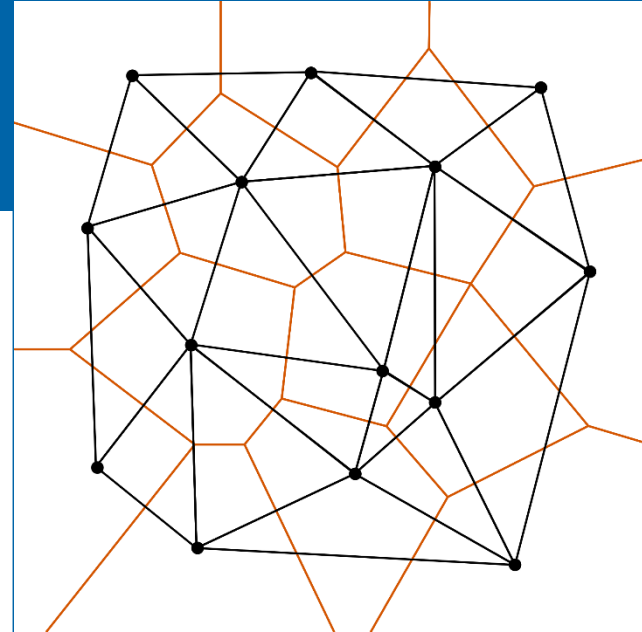
- Bezüglich der linearen Interpolation über Dreiecken ist eine Delaunay Triangulation durch die minimale „Rauheit“ des zugehörigen stückweisen Interpolanten gekennzeichnet.
- Delaunay Triangulation verknüpft die Geometrie mit einer Eigenschaft des zugehörigen stückweisen Interpolanten,

**obwohl die Parameterwerte  $f_i = f(p_i)$  nicht in die Triangulation einfließen!**

Als Maß für die „Rauheit“ wird hier die  $L^2$ -Norm des Gradienten bzgl. der konvexen Hülle von  $P$  verwendet:  $R\hat{f} = \int_{[P]} |\nabla \hat{f}(x, y)|^2 d(x, y)$ .

## Take-home questions:

1. Was bedeutet der Terminus „Dualer Graph?“
2. Welches Triangulationskriterium verwendet die Delaunay Triangulation?
3. Ist die Delaunay Triangulation immer eindeutig?
4. Worin liegt der praktische Unterschied zwischen linearer Interpolation auf Dreiecken und „Natural Neighbor“-Interpolation.



Institut für Geophysik und Geoinformatik  
Dr. Peter Menzel  
Gustav-Zeuner-Str. 12  
09599 Freiberg  
Tel. +49(0)3731 39-3815

Institut für Geophysik und Geoinformatik

Dr. Peter Menzel

Gustav-Zeuner-Str. 12

09599 Freiberg

Tel. +49(0)3731 39-3815