



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERGAKADEMIE FREIBERG

Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

Grundlagen GIS

Sommersemester 2024

Prof. Christian Gerhards
Arbeitsgruppe Geomathematik und Geoinformatik

OPAL:

<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873?6>

Institut für Geophysik und Geoinformatik - TU Bergakademie Freiberg

1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen (Vorlesung 1)
- 2. Koordinatensysteme und -transformationen**
3. Räumliche Datenmodellierung
4. Vermaschungen
5. Räumliche Interpolation
6. Transformationen, Filtermethoden, Sonstiges

Raumbezug

Jedes Geobjekt muss einen **Raumbezug** aufweisen. Die Zuweisung eines Raumbezuges durch einen Anwender zu einem Geobjekt wird als **Georeferenzierung** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Raumbezug

Jedes Geobjekt muss einen **Raumbezug** aufweisen. Die Zuweisung eines Raumbezuges durch einen Anwender zu einem Geobjekt wird als **Georeferenzierung** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Direkter Raumbezug (primäre Metrik):

- Der Raumbezug über die Angabe zwei- oder dreidimensionalen Koordinaten hergestellt.
- Die Koordinaten beziehen sich auf ein bestimmtes Referenzsystem (*spatial reference*).
 - Lokal: Pixel-Koordinaten in Raster, Lokale Koordinaten relativ zu Referenzpunkt
 - Global: Koordinaten bzgl. Globalem Referenzsystem (UTM, Gauss-Krüger ...)
- Distanzen zwischen Objekten können leicht berechnet werden.

Jedes Geoobjekt muss einen **Raumbezug** aufweisen. Die Zuweisung eines Raumbezuges durch einen Anwender zu einem Geoobjekt wird als **Georeferenzierung** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Direkter Raumbezug (primäre Metrik):

- Der Raumbezug über die Angabe zwei- oder dreidimensionalen Koordinaten hergestellt.
- Die Koordinaten beziehen sich auf ein bestimmtes Referenzsystem (*spatial reference*).
 - Lokal: Pixel-Koordinaten in Raster, Lokale Koordinaten relativ zu Referenzpunkt
 - Global: Koordinaten bzgl. Globalem Referenzsystem (UTM, Gauss-Krüger ...)
- Distanzen zwischen Objekten können leicht berechnet werden.

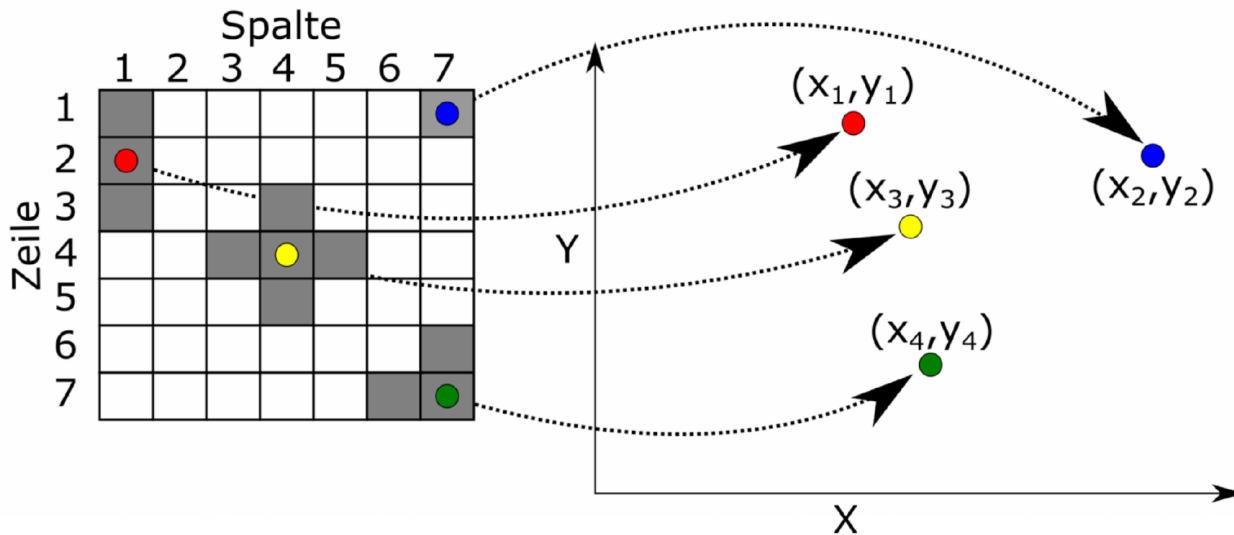
Indirekter Raumbezug (sekundäre Metrik):

- Raumbezug ist über qualitativen Größen angegeben, z.B.
 - Kennziffern (Postleitzahlen, Flurstücksnummern)
 - Namen von Orten / Gebieten
 - Adressen
 - ...
- Distanzen zwischen Objekten können nur schwer berechnet werden
 - **Umwandlung in primäre Metrik!**

Georeferenzierung / Geokodierung

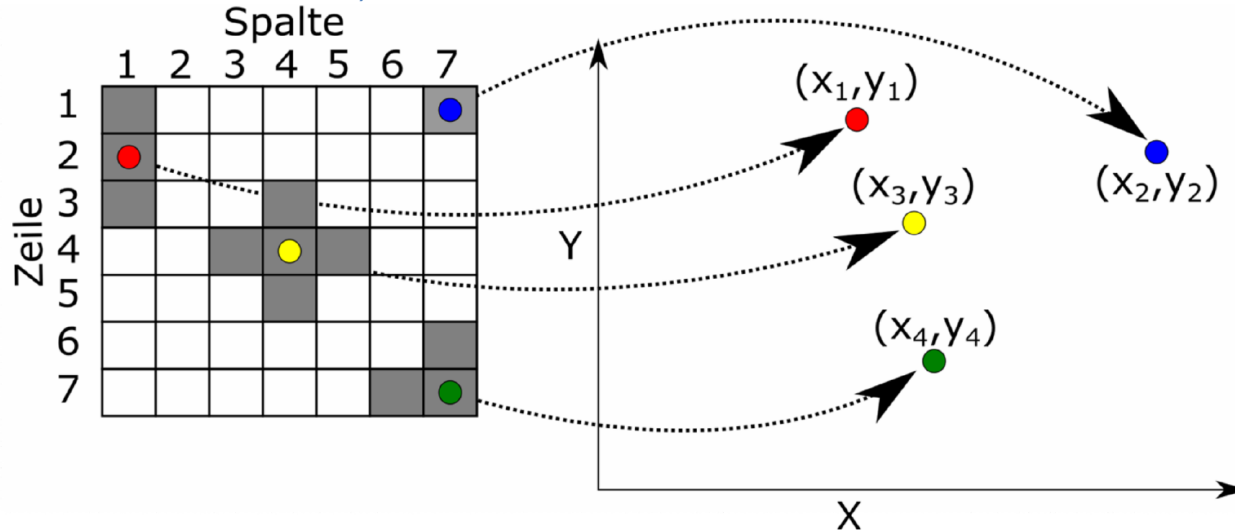
Im engeren Sinne bezeichnet **Georeferenzierung** die Zuweisung eines Raumbezuges zu einem Datensatz und **Geokodierung** die Überführung zwischen Koordinatensystemen.

Georeferenzierung umfasst (im weiteren Sinne; im ArcGIS-Kontext) den Workflow, welcher den externen Raumbezug der zu verwendenden Daten in den Raumbezug des GIS-Projektes umwandelt. Es muss der externe Raumbezug (z.B. geographische Koordinaten (λ, φ) oder Pixel in einem Luftbild) in ein üblicherweise durch (x,y) -Koordinaten gegebenen Raumbezug des GIS Projektes (lokales Koordinatensystem) überführt werden.



Georeferenzierung / Geokodierung

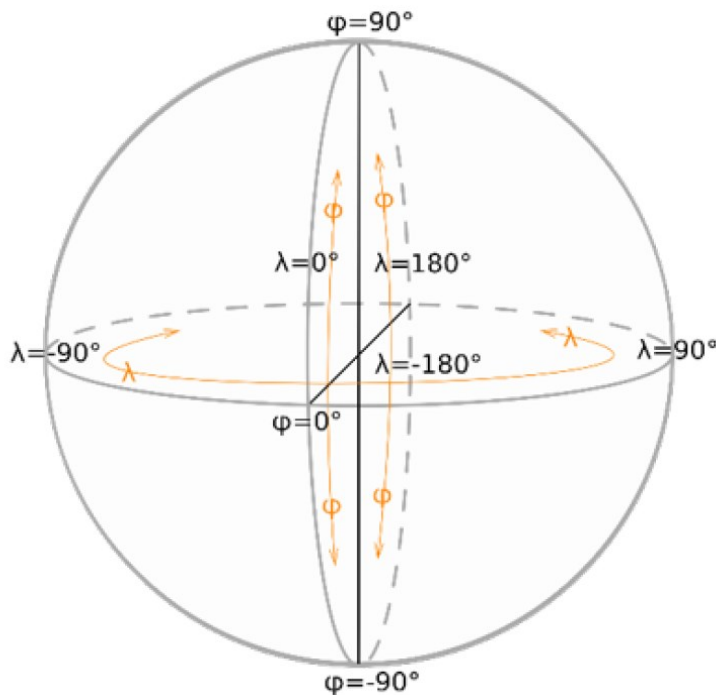
Eine der grundlegenden Aufgaben in einem GIS Projekt ist die Geokodierung, d.h. die Überführung des Raumbezuges aller Eingangsdatensätze in den gemeinsamen Raumbezug des GIS-Projektes. Dies ist notwendig, um verschiedene Datensätze räumlich miteinander vergleichen und kombinieren zu können (z.B. Luftbildaufnahme, Topographische Karte, geochemische Punktdaten).



Ein **erstes Problem**: Wie bekomme ich die kugelförmige Erde auf die Ebene projiziert?

Kartenprojektion

- Jeder Punkt im Raum kann durch 3 kartesische Koordinaten x, y, z gegeben werden
- Problem 1: eine Karte ist üblicherweise 2-D
- Problem 2: die Erde ist annähernd kugelförmig



Transformation zwischen sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) und kartesischen Koordinaten (x, y, z)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\lambda) \sin(\varphi) \\ r \sin(\lambda) \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für $r > 0$, $0 \leq \lambda < 2\pi$, und $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Umwandlung der Einheiten in "Grad":
 $-180^\circ \leq \lambda < 180^\circ$ und $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

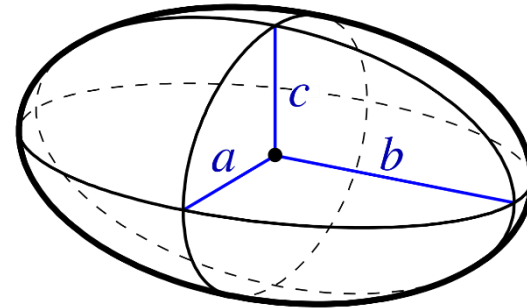
Um es 2D darstellen zu können brauchen wir eine Referenzfläche.

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid:** $a = b; c$
 - Abplattung $f = \frac{a-c}{c}$
- Kugel: $r=a=b=c$ (z.B. $r=6371.2\text{km}$)



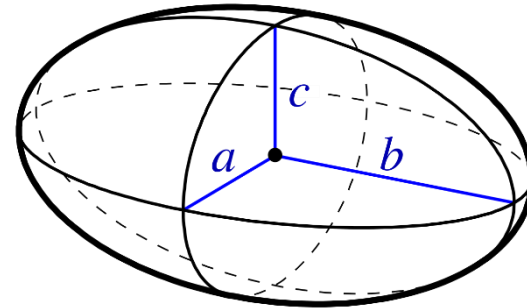
Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid:** $a = b; c$
 - Abplattung $f = \frac{a-c}{c}$
- Kugel: $r=a=b=c$ (z.B. $r=6371.2\text{km}$)



Wichtige Referenzellipsoide sind z.B.

Name	a, b (in km)	c (in km)
WGS84 (1984, Nutzung für GPS)	6378.137	6356.752
Bessel (1841)	6377.379	6356.079
Hayford (1924)	6378.388	6356.912
Krassowskij (1940)	6378.245	6356.863

Kartenprojektion

Übliche Referenzflächen:

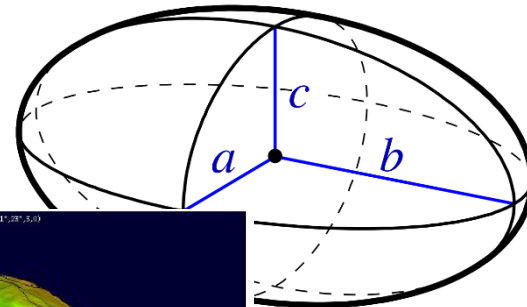
- Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- **Rotationsellipsoid:**

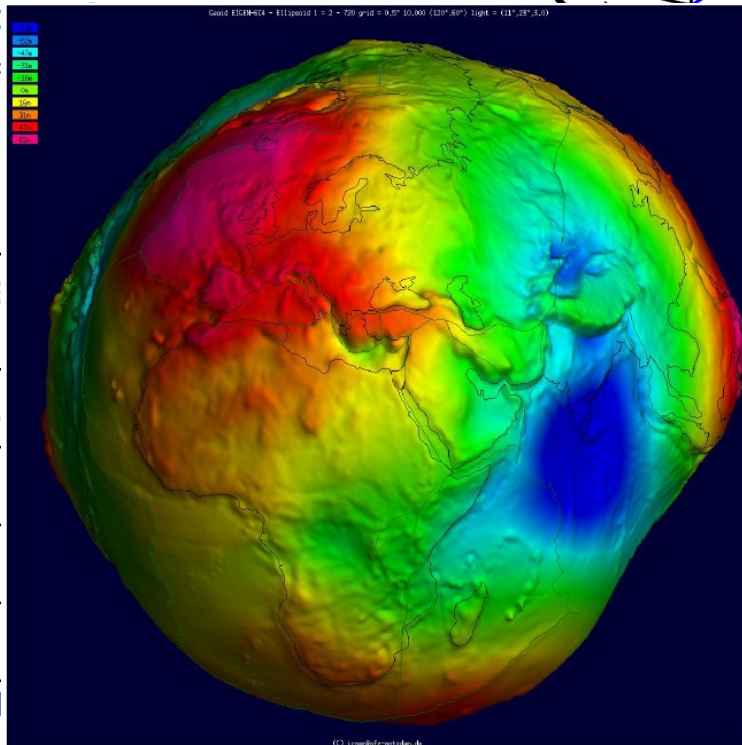
- Abplattung $f =$

- Kugel: $r=a=b=c$ (z.B.



Wichtige Referenzellips

Name
WGS84 (1984, Nutzu
Bessel (1841)
Hayford (1924)
Krassowskij (1940)



	c (in km)
	6356.752
	6356.079
	6356.912
	6356.863

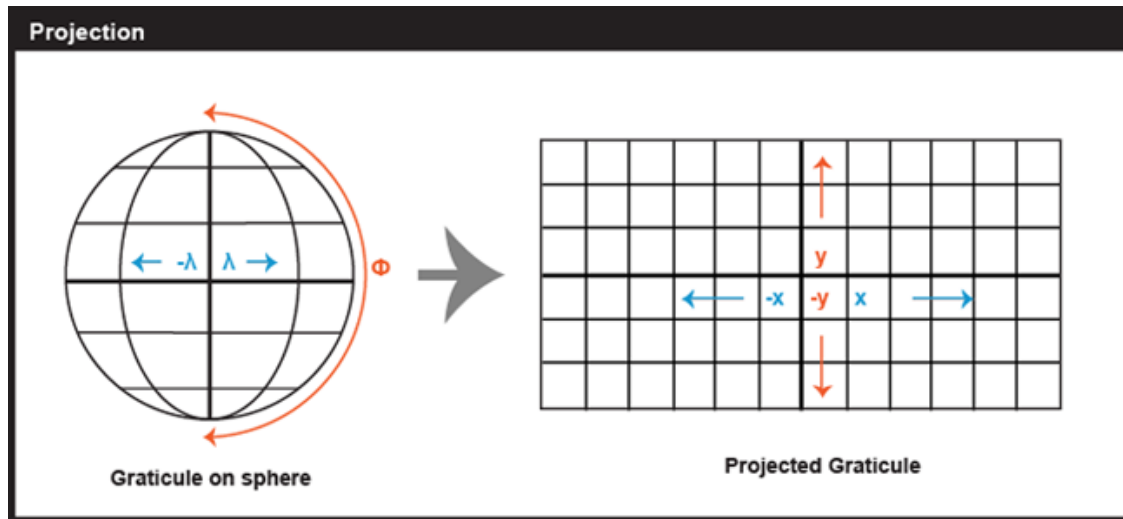
- physikalische mo
Gravitationspotential

che eines konstanten

icgem.gfz-potsdam.de

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?



www.e-education.psu.edu/geog160/node/1918

Problem: Finde eine geeignete Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}_r \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

oder alternativ $T : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2,$

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- Längentreu
- Flächentreu

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

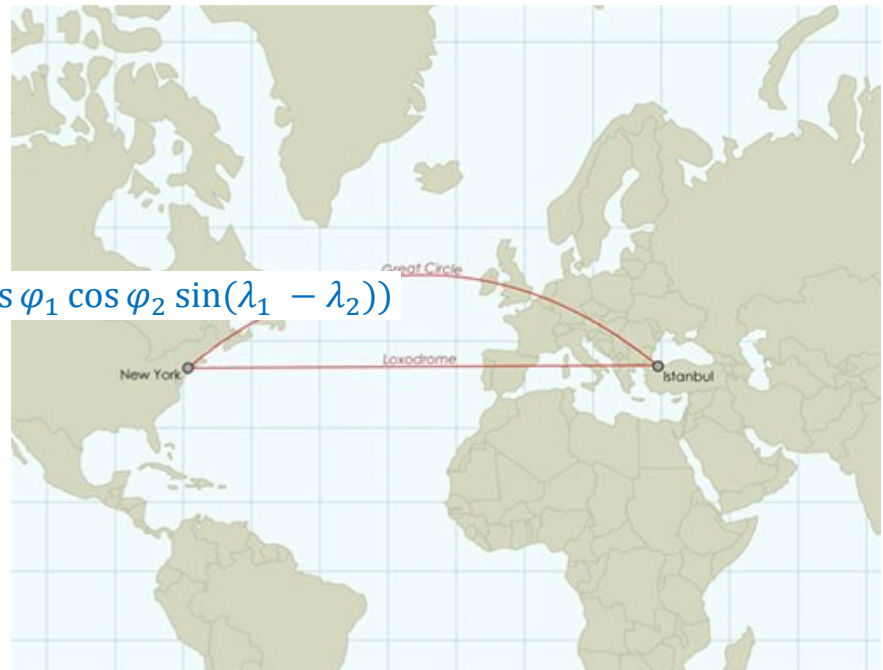
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Kürzeste Distanz auf kugelförmiger Erde:

$$\text{dist}_{sph}(P_1, P_2) = r \arcsin(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2))$$

immer entlang eines Großkreises



<https://www.axismaps.com/guide/map-projections>

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechteckigen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Kürzeste Distanz auf kugelförmiger Erde:

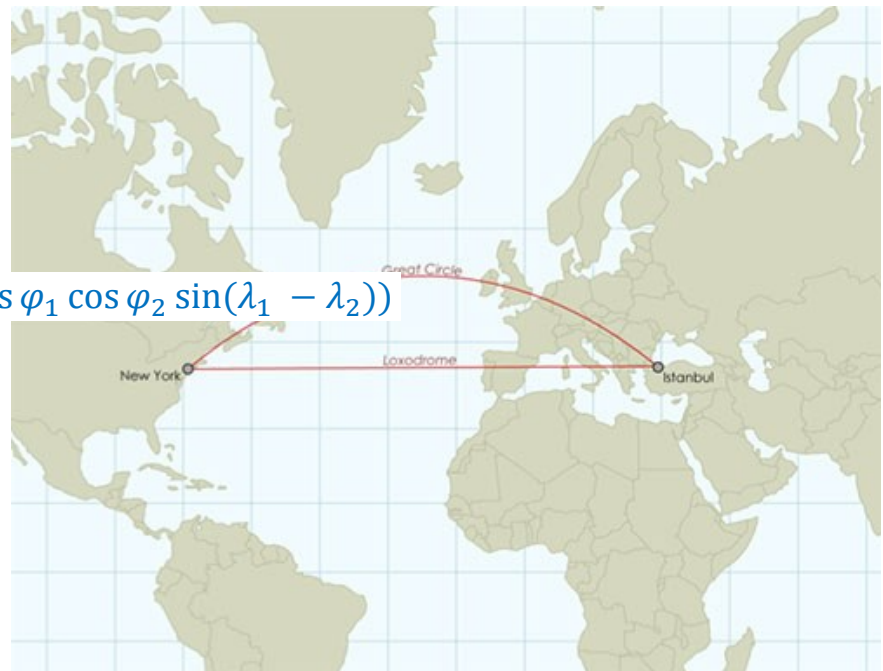
$$\text{dist}_{sph}(P_1, P_2) = r \arcsin(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2))$$

immer entlang eines Großkreises

Kürzeste Distanz auf euklidischer Ebene:

$$\text{dist}_{eucl}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(Satz des Pythagoras)



<https://www.axismaps.com/guide/map-projections>

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden in einem rechwinkligen Koordinatensystem sinnvoll?

Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- **Längentreu**
- Flächentreu

Eine Projektion heißt *längentreu* (mit Maßstab α), falls

$$\text{dist}_{\text{eucl}}(P_1, P_2) = \alpha \text{dist}_{\text{sph}}(P_1, P_2)$$

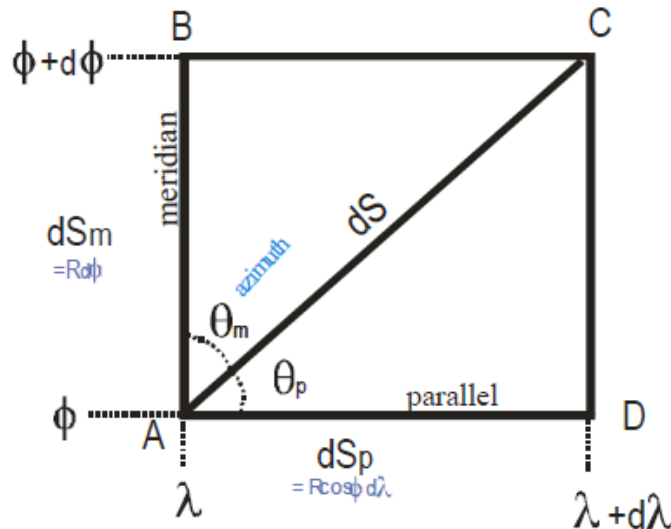
Global längentreue Abbildungen **gibt es nicht**, aber Längentreue unter bestimmten Annahmen kann garantiert werden (z.B. von einem zentralen Punkt aus)



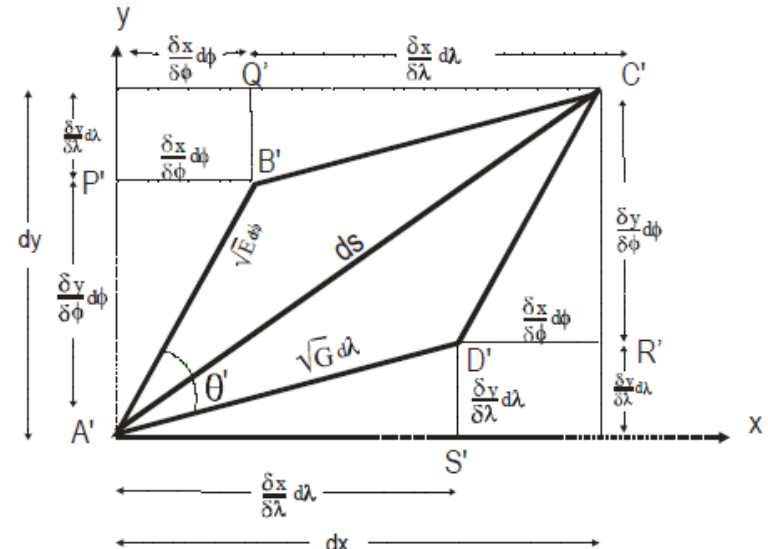
<https://www.axismaps.com/guide/map-projections>

Kartenprojektion

Infinitesimales Rechteck auf der Kugeloberfläche



Infinitesimales Rechteck in der Kartenebene



Beziehungen zwischen verschiedenen Kenngrößen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2$$

$$(ds)^2 = E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi d\lambda) + G(d\lambda)^2$$

E, F, G: Gaussche Fundamentalgrößen

Beziehungen zwischen verschiedenen Kenngrößen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2$$

$$(ds)^2 = E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi d\lambda) + G(d\lambda)^2$$

E,F,G: Gaussche Fundamentalgrößen

Mit

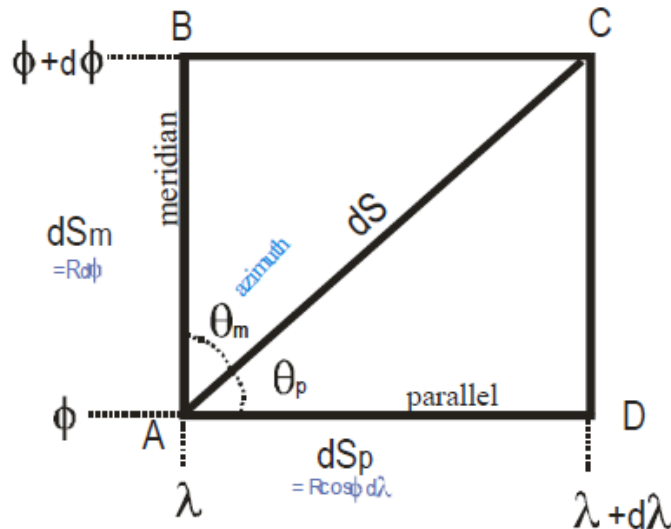
$$E(d\varphi)^2 = \left(\left(\frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\varphi^2$$

$$G(d\lambda)^2 = \left(\left(\frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right)^2 \right) d\lambda^2$$

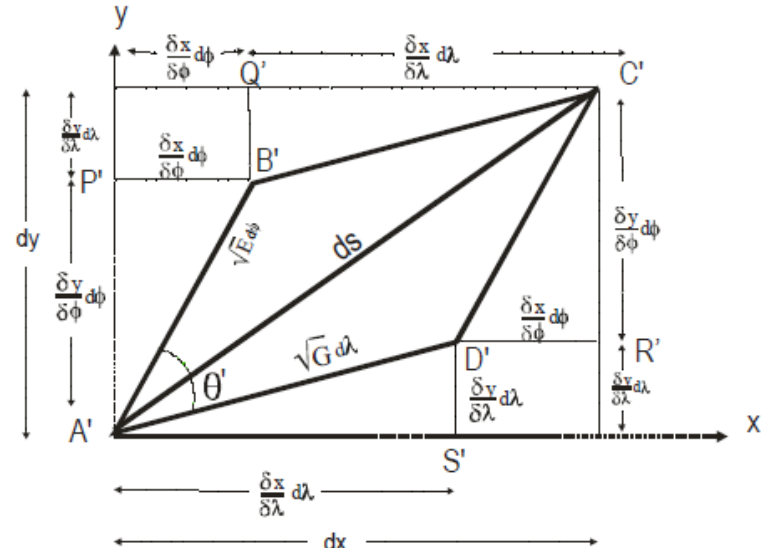
$$F(d\varphi d\lambda) = \left(\frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi \partial \lambda} \right) d\varphi d\lambda$$

Kartenprojektion

Infinitesimales Rechteck auf der Kugeloberfläche



Infinitesimales Rechteck in der Kartenebene



Skalen/Massstäbe:

$$\alpha_\lambda = \frac{A'D'}{AD} = \frac{\sqrt{G}}{r \cos(\varphi)}$$

$$\alpha_\varphi = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{E}}{r}$$

$$\alpha = \frac{A'C'}{AC} = \frac{\sqrt{E(d\varphi)^2 + 2F(d\varphi d\lambda) + G(d\lambda)^2}}{\sqrt{(d\varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 (d\lambda)^2}}$$

Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden sinnvoll in einem rechteckigen Koordinatensystem sinnvoll?

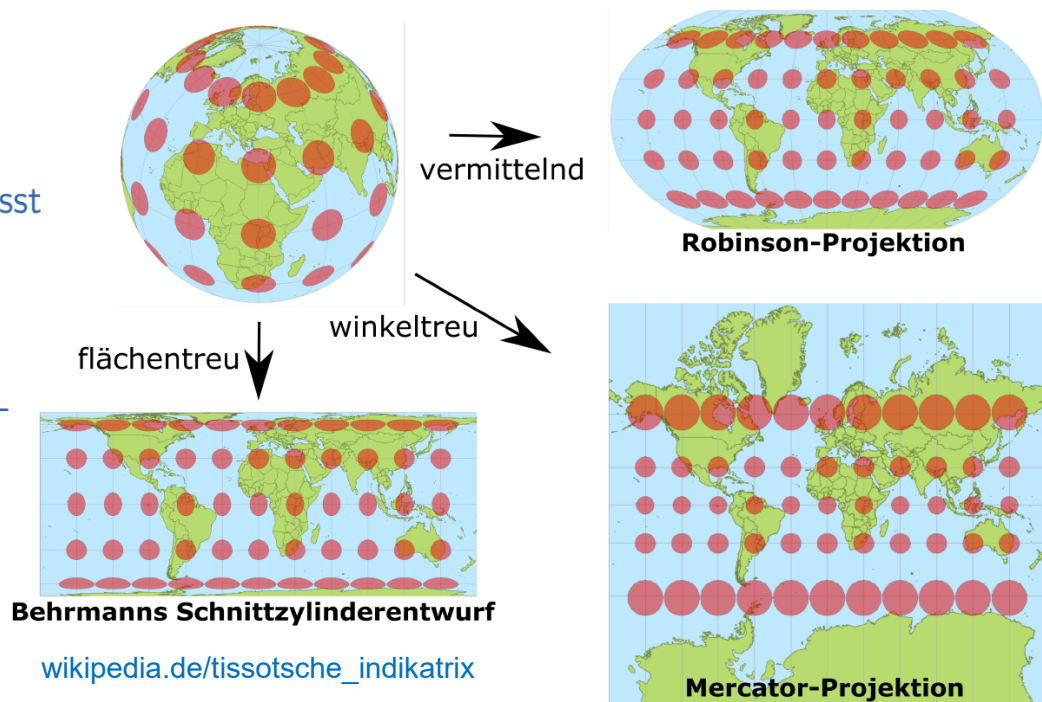
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- **Winkeltreu**
- Längentreu
- Flächentreu

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heisst winkeltreu (konform), falls

$$\frac{\langle TP, TQ \rangle}{\|TP\| \|TQ\|} = \frac{\langle P, Q \rangle}{\|P\| \|Q\|}$$

für alle P, Q aus dem Tangentialraum der Sphäre, und falls die Determinante von T positiv ist.



Kartenprojektion

Es muss zur Darstellung in 2D jedoch die Oberfläche des Referenzkörpers (hier Kugel) auf eine Ebene projiziert werden (Höhe r wird meist als Attribut betrachtet): Ist eine bloße Darstellung mittels Längen- und Breitengraden sinnvoll in einem rechteckigen Koordinatensystem sinnvoll?

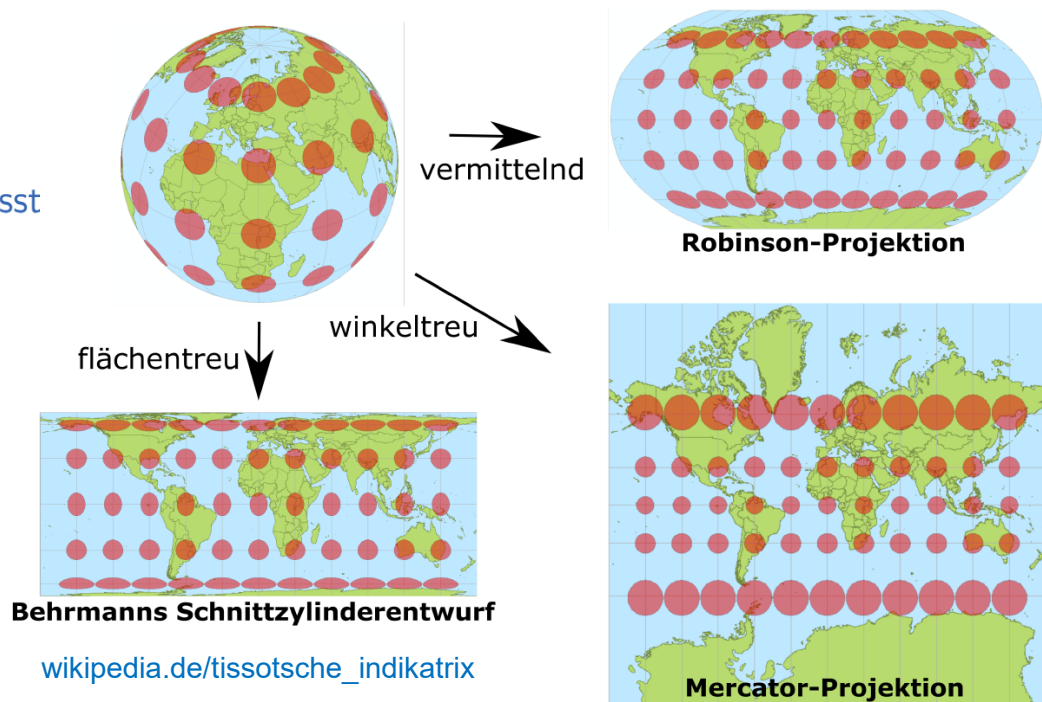
Eine globale verzerrungsfreie Darstellung der Erde ist nicht möglich:

- Winkeltreu
- Längentreu
- **Flächentreu**

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heisst flächentreu, falls

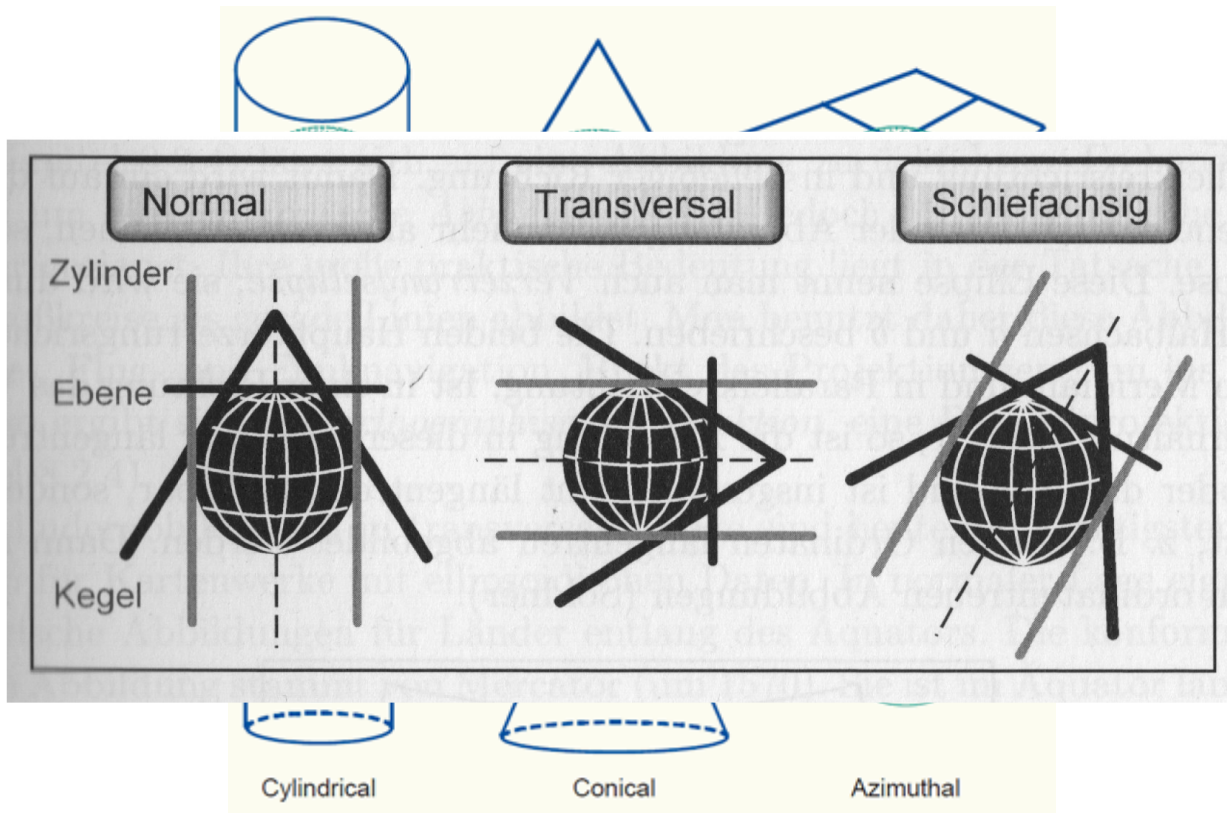
$$\int_{\Omega} 1 d\mu = \alpha \int_{T(\Omega)} 1 d(x, y)$$

für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{S}_r$. Die Konstante α spiegelt dabei den Masstab wieder (Masstab sei hier als ein Skalierungsfaktor aufgefasst, nicht der umgangssprachliche Masstab).



Kartenprojektion

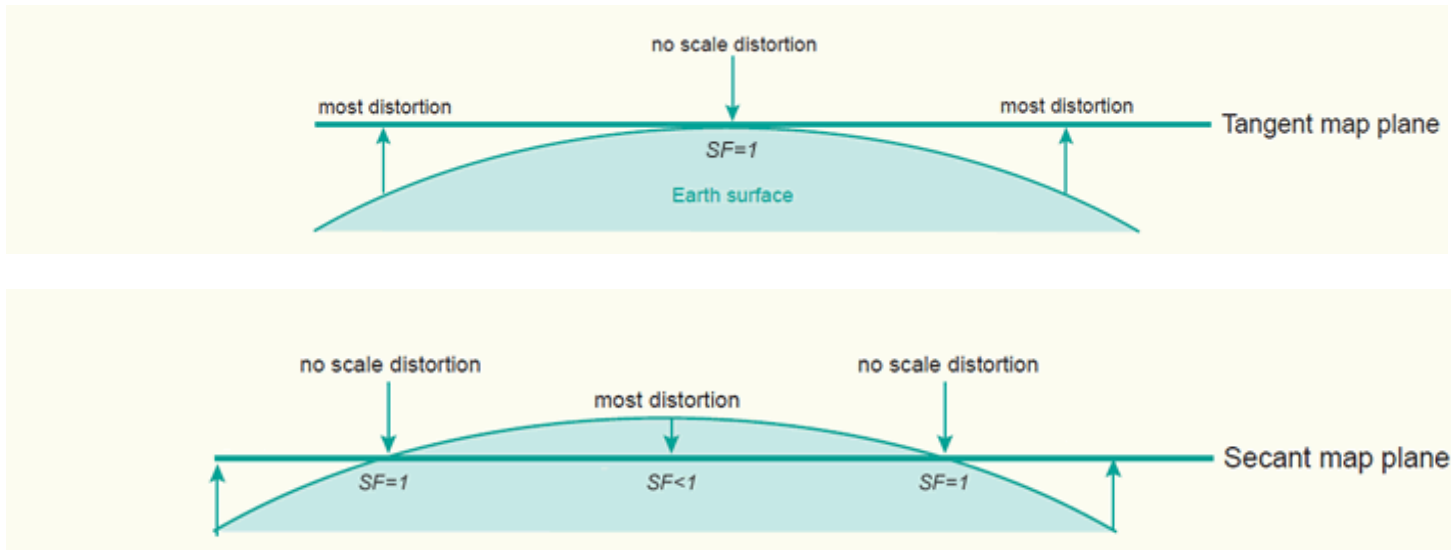
Man unterscheidet Kartenprojektionen basierend auf den Projektionsflächen



<https://kartoweb.itc.nl>

Kartenprojektion

Der Skalierungsfaktor beschreibt den Quotienten zwischen dem wahren Abstand zweier infinitesimal entfernten Punkte P und Q und dem Abstand der auf die Ebene projizierten Punkte TP und TQ.



<https://kartoweb.itc.nl>

Welche Projektionsebene würden Sie bevorzugen?

Kartenprojektion

Beispiele für winkeltreue Projektionen:

- **Mercator Projektion** (Zylinder-Projektion)

Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$. Mit λ_0 dem Referenzmeridian (üblicherweise Greenwich $\lambda_0 = 0$):

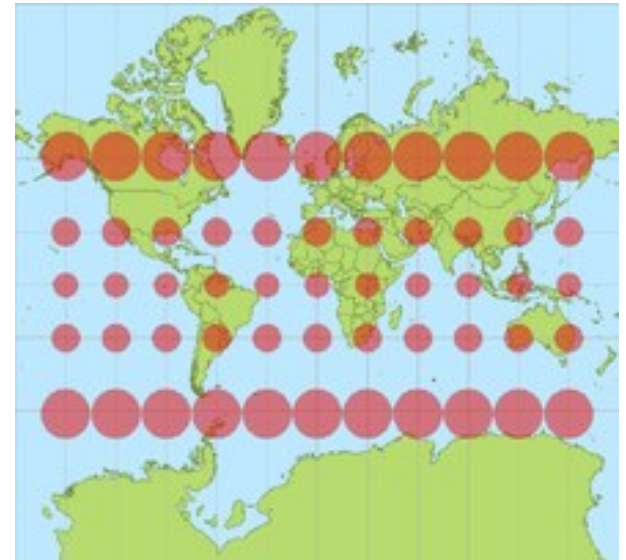
$$x = r(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = r \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

Für die Inversion $(\lambda, \varphi) = T^{-1}(x, y)$ gilt

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{r}$$

$$\varphi = 2 \arctan \left(\exp \left(\frac{y}{r} \right) \right) - \frac{\pi}{2}$$



Beispiele für winkeltreue Projektionen:

- **Mercator Projektion** (Zylinder-Projektion)

Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$. Mit λ_0 dem Referenzmeridian (üblicherweise Greenwich $\lambda_0 = 0$):

$$x = r(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = r \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

Für die Inversion $(\lambda, \varphi) = T^{-1}(x, y)$ gilt

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{r}$$

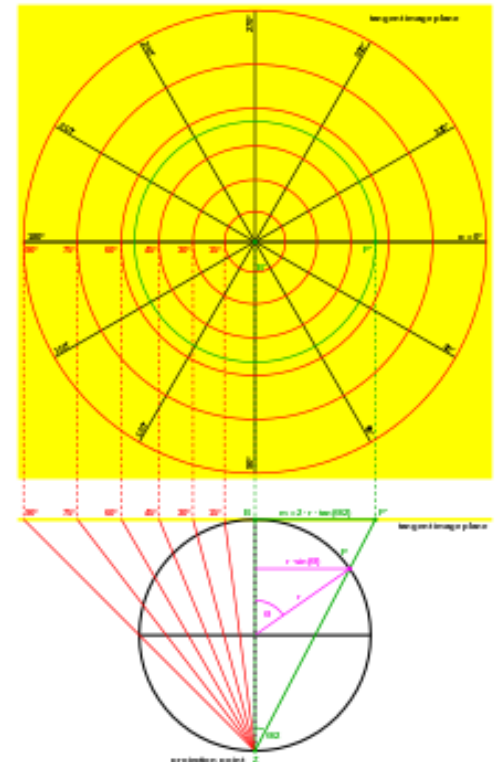
$$\varphi = 2 \arctan \left(\exp \left(\frac{y}{r} \right) \right) - \frac{\pi}{2}$$

- **Stereographische Projektion** (azimuthale Projektion)

Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi) = s(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, wobei

$$\alpha = \lambda$$

$$s = 2r \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$



Kartenprojektion

Beispiele für flächentreue Projektionen:

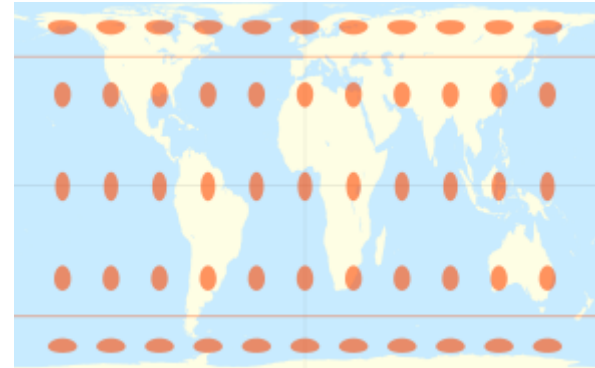
- **Gall-Peters Projektion** (Zylinder-Projektion)

Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$:

$$x = r\lambda$$

$$y = 2r \sin(\varphi)$$

<https://map-projections.net/compare.php>



Beispiele für flächentreue Projektionen:

<https://map-projections.net/compare.php>

- **Gall-Peters Projektion** (Zylinder-Projektion)

Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$:

$$x = r\lambda$$

$$y = 2r \sin(\varphi)$$

- **Albers Kegelprojektion**

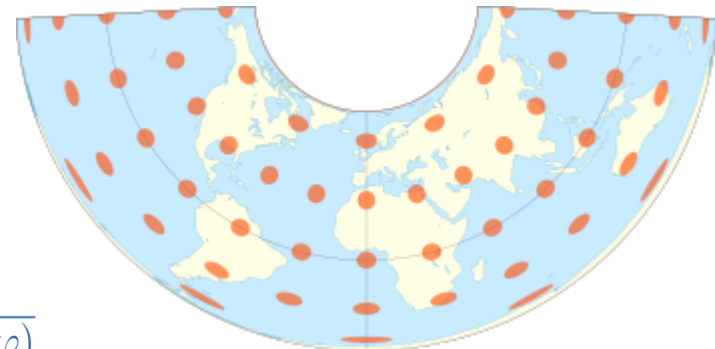
Es sei $(x, y) = TP = T(\lambda, \varphi)$, sowie $\lambda_0, \varphi_1, \varphi_2$
Referenzlängen- bzw. -breitengrade:

$$x = \rho \sin(\theta)$$

$$y = \rho_0 - \rho \cos(\theta),$$

wobei $\theta = \beta(\lambda - \lambda_0)$, $\beta = \frac{1}{2}(\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))$,

$\gamma = \cos^2(\varphi_1) + 2\beta \sin(\varphi_1)$, und $\rho = \frac{r}{\beta} \sqrt{\gamma - 2\beta \sin(\varphi)}$.



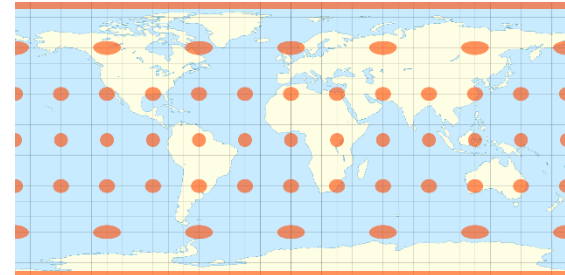
Beispiele für längentreue Projektionen (hier nicht weiter im Detail besprochen):

- **Quadratische Plattkarte:** längentreu entlang der Meridiane

- Direkte Abbildung der geografischen Koordinaten in die Ebene
- Grundidee: $x = \lambda$ und $y = \varphi$
- Transformation:

$$x = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi_1$$

$$y = \varphi - \varphi_1$$



<https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte>

Kartenprojektion

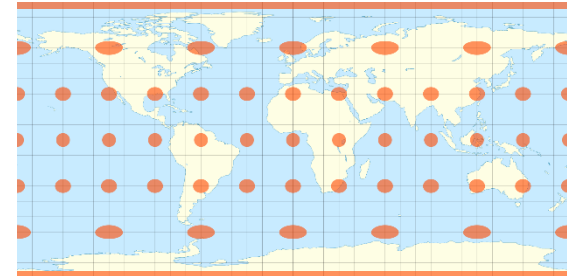
Beispiele für längentreue Projektionen (hier nicht weiter im Detail besprochen):

- **Quadratische Plattkarte:** längentreu entlang der Meridiane

- Direkte Abbildung der geografischen Koordinaten in die Ebene
- Grundidee: $x = \lambda$ und $y = \varphi$
- Transformation:

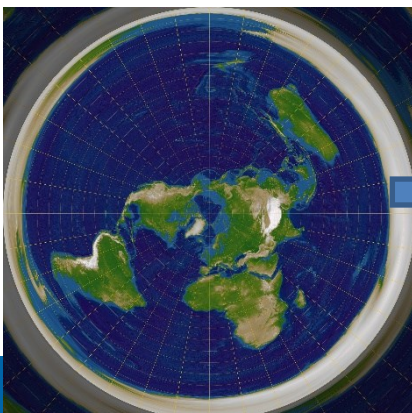
$$x = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi_1$$

$$y = \varphi - \varphi_1$$

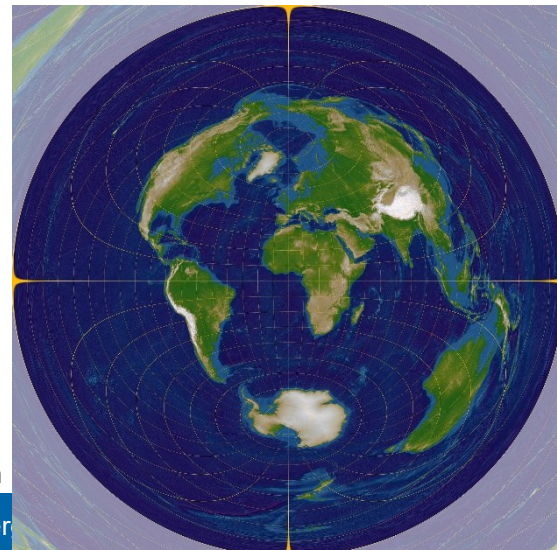


<https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte>

- **Mittelabstandstreue Azimutalprojektion:** längentreu von zentralem Punkt aus



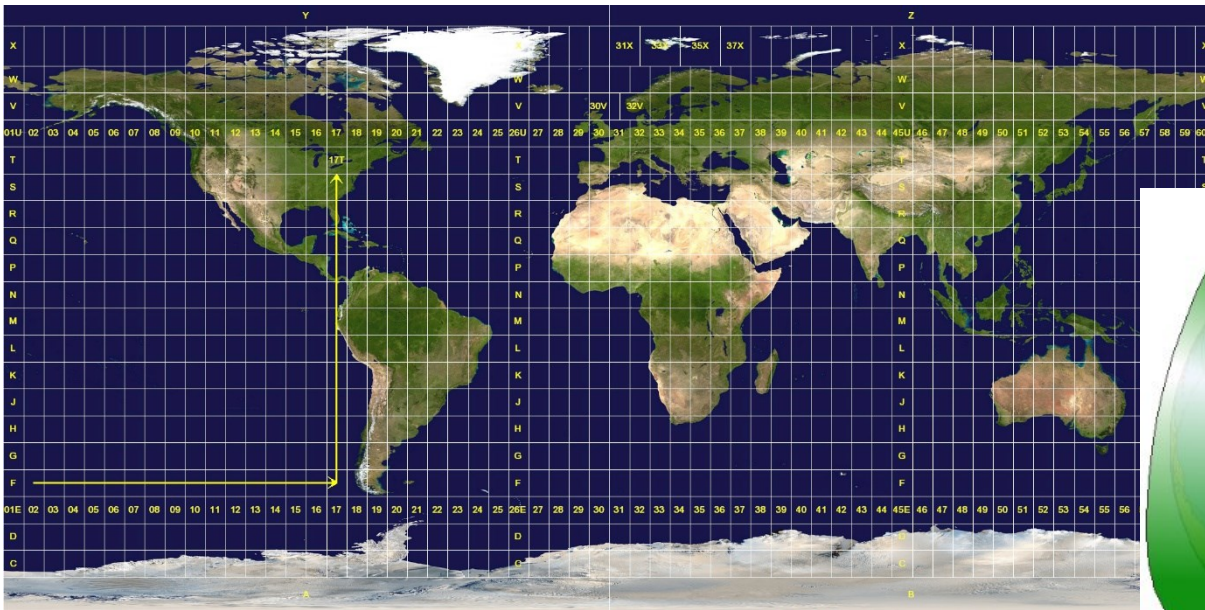
Mittelabstandstreue_Azimutalprojektion



Kartenprojektion

Sehr häufig verwendet: **UTM (Universal Transverse Mercator)**, Skalierungsfaktor $\alpha > 0.9996$

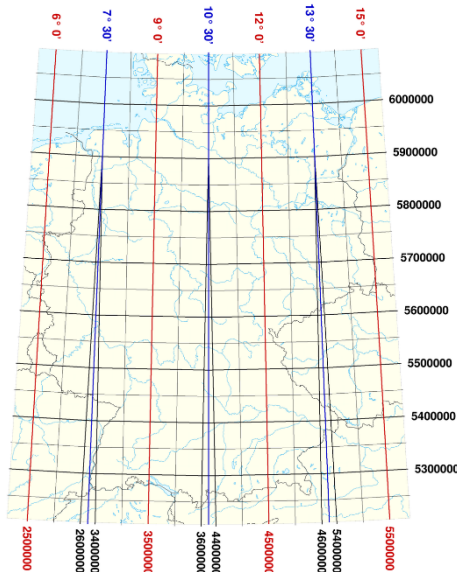
- Aufteilung der Erde in Zonen von ca. 6° Breite
- Jede Zone nutzt eine transversale Mercator Schitzylinderprojektion
- Referenzellipsoid ist GRS80 (nicht die Kugeloberfläche, wie bei den vorher angegebenen Transformationsformeln)



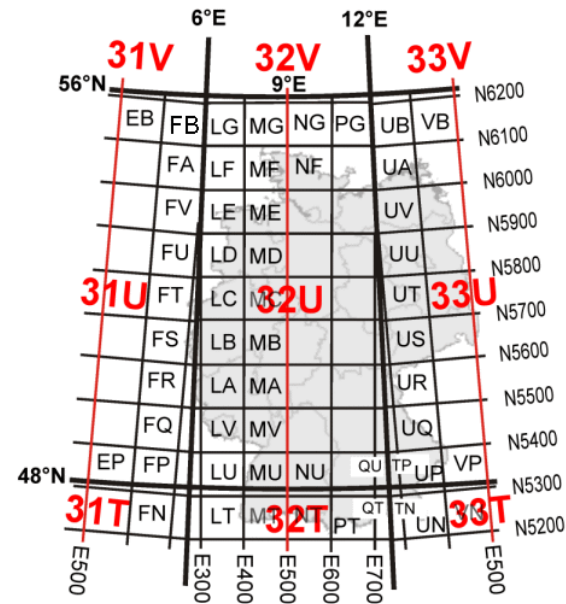
Kartenprojektion

Ebenfalls sehr häufig verwendet: **Gauss-Krüger**; nutzt ebenfalls transversale Mercator Projektion; Unterschiede zu UTM:

- Aufteilung der Erde in Zonen von ca. 3° Breite
- Referenzellipsoid ist Bessel



Gauss-Krüger



UTM

Koordinatenumwandlung

Georeferenzierung umfasst (grob gesagt) den Workflow, welcher den externen Raumbezug der eigentlichen Daten in den Raumbezug des GIS-Projektes umwandelt. Es muss der externe Raumbezug (z.B. geographische Koordinaten (λ, φ) oder Pixel in einem Luftbild) in ein üblicherweise durch (x, y) -Koordinaten gegebenen Raumbezug des GIS Projektes (lokales Koordinatensystem).

Wir unterscheiden oft zwei Koordinatenoperation:

- **Koordinatenumwandlung**
- Koordinatentransformation

$$(x', y') \xrightarrow{T_1^{-1}} (\lambda, \varphi) \xrightarrow{T_2} (x'', y'')$$

Mit den bekannten Kartenprojektionen T_1 und T_2 .

