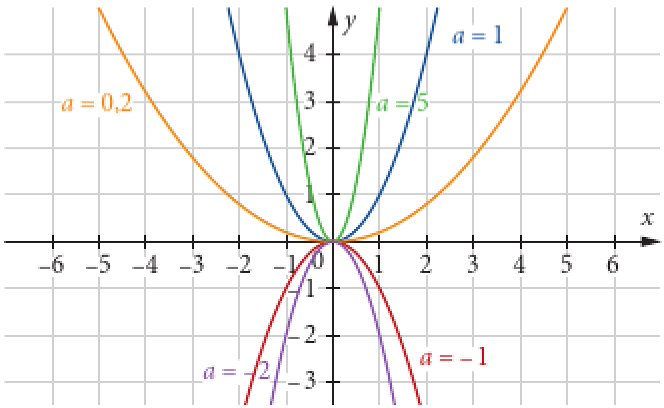
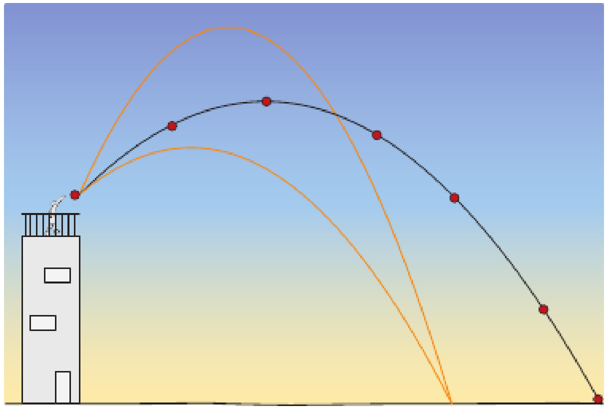
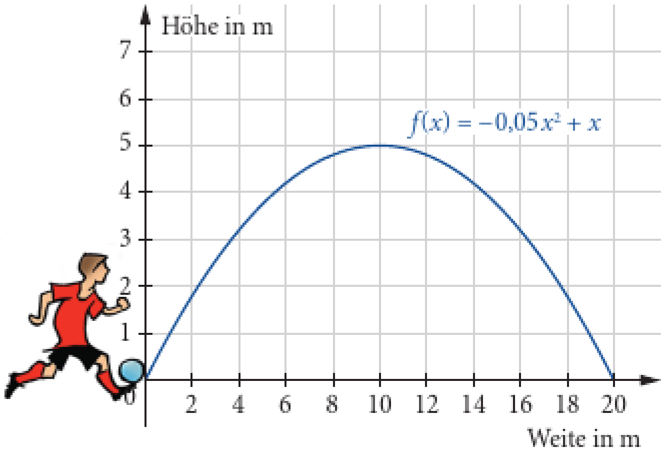
Abb. Cornelsen 2017



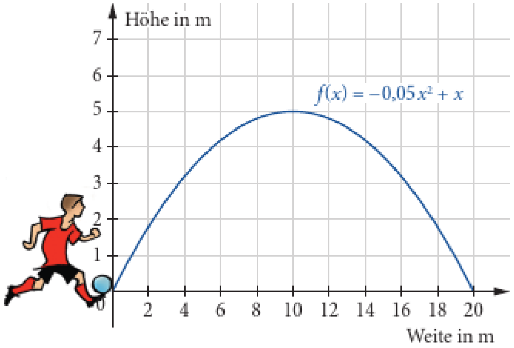




Quadratische Funktionen (MS Klasse 9)

Seminar Didaktik der Arithmetik und Algebra,
SE MA SoSe 2019, U. Tuschy

Überblick



Was? Welche Inhalte sollen unterrichtet werden

Warum? Bedeutung für Allgemeinbildung usw.

Wie? Umsetzung im Unterricht

Aufgabenbeispiele

Fachlicher Inhalt

- Quadratische Funktionen:
  - $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$
  - das Bild einer solchen Funktion ist eine Parabel mit einer zur y-Achse parallelen Parabelachse und dem Scheitel
    $S\left(-b / (2a) ; (4ac - b^2) / (4a) \right)$
  - die Funktionen sind ganzrationale Funktionen zweiten Grades und haben höchstens zwei Nullstellen

Anforderungen des Lehrplans, Klasse 9 MS

Lernbereich 3:	**Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen**	**28 Ustd.**

Übertragen der Kenntnisse über Funktionen auf quadratische Funktionen - Definitionsbereich und Wertebereich - Funktionsgleichung, Wertetabelle und Graph - Ablesen von Nullstellen	→ Kl. 8, LB 2 auch unter Verwendung von geometrischen und physikalischen Zusammenhängen
Einblick gewinnen in das Monotonieverhalten quadratischer Funktionen	
Beherrschen der zeichnerischen und rechnerischen Bestimmung des Scheitelpunktes	auch unter Nutzung des Computers
- $y = (x + d)^2 + e$	Produkt von Summen
- $y = x^2 + p \cdot x + q$	
- $y = a \cdot x^2 + c$	
- Scheitelpunkt als Extrempunkt, Minimum, Maximum	

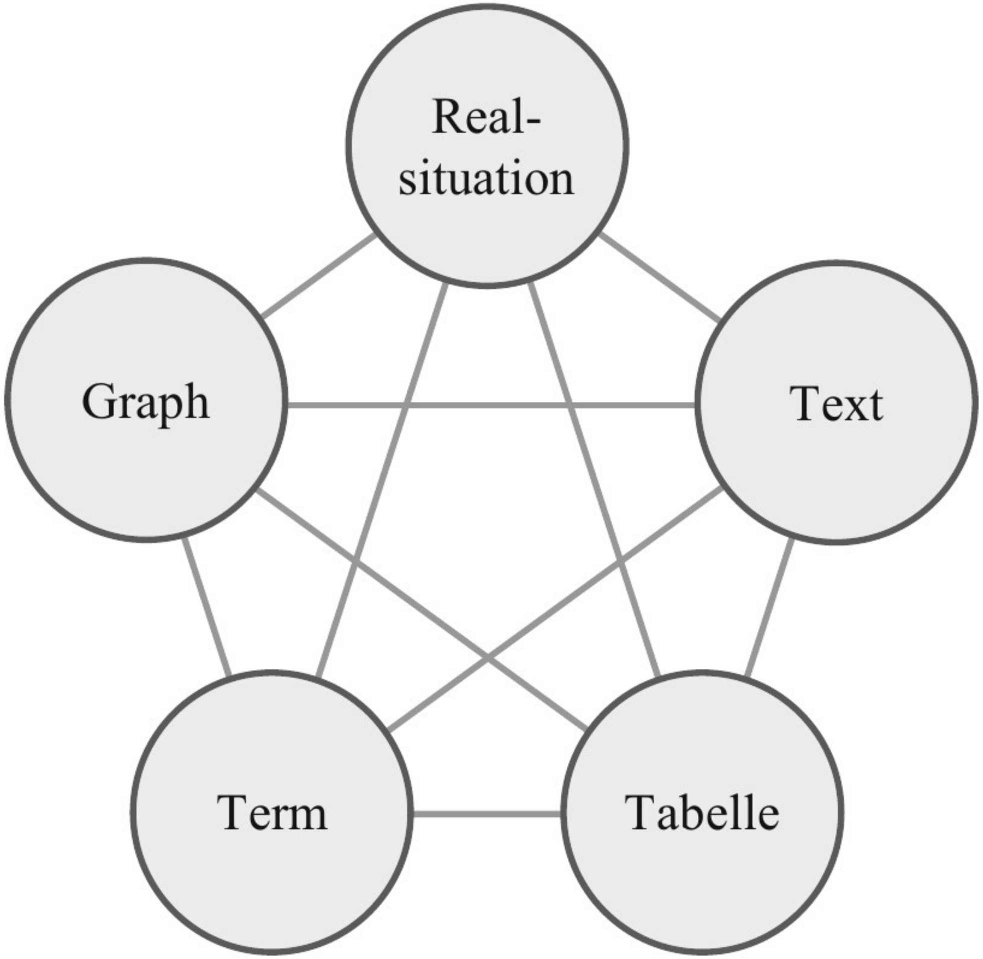
Anforderungen des Lehrplans, Klasse 9 MS

- Hauptschule:
  - nur im Differenzierungsbereich!
  - (Kennen:) Graph der Funktion x^2

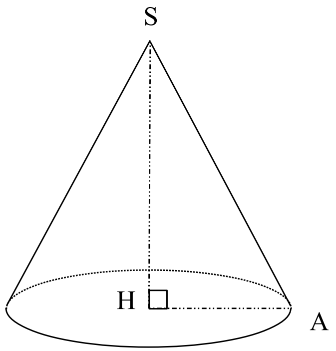
Anforderungen des Lehrplans, Klasse 9 MS

- Realschule:
  - Fortsetzung der Arbeit am Begriff Funktion aus Klasse 8
  - Kennenlernen verschiedener Darstellungen für quadratische Fkt. (Wertetabelle, Graph, Funktionsgleichung in NF und SPF, verbale Beschreibung)
  - diese Darstellungsformen verstehen, erstellen, interpretieren und ineinander übersetzen
  - Einblick in wesentliche Eigenschaften wie
    - Definitions-, Wertebereich, Nullstellen, Monotonieverhalten

Wechsel von Darstellungsformen

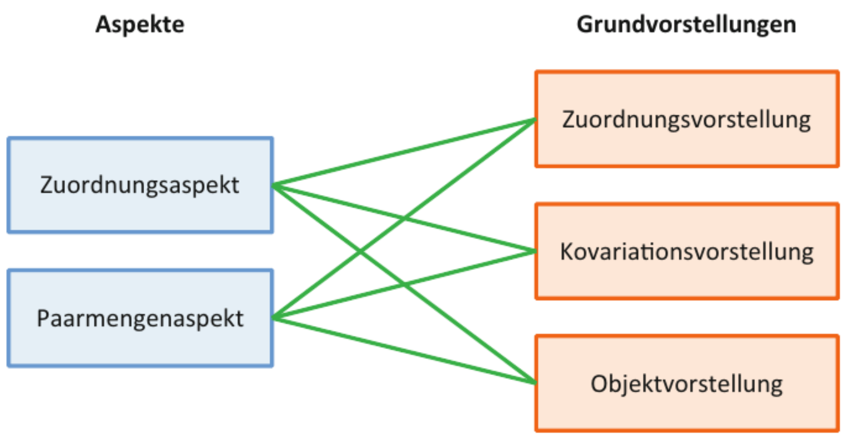


Warum?



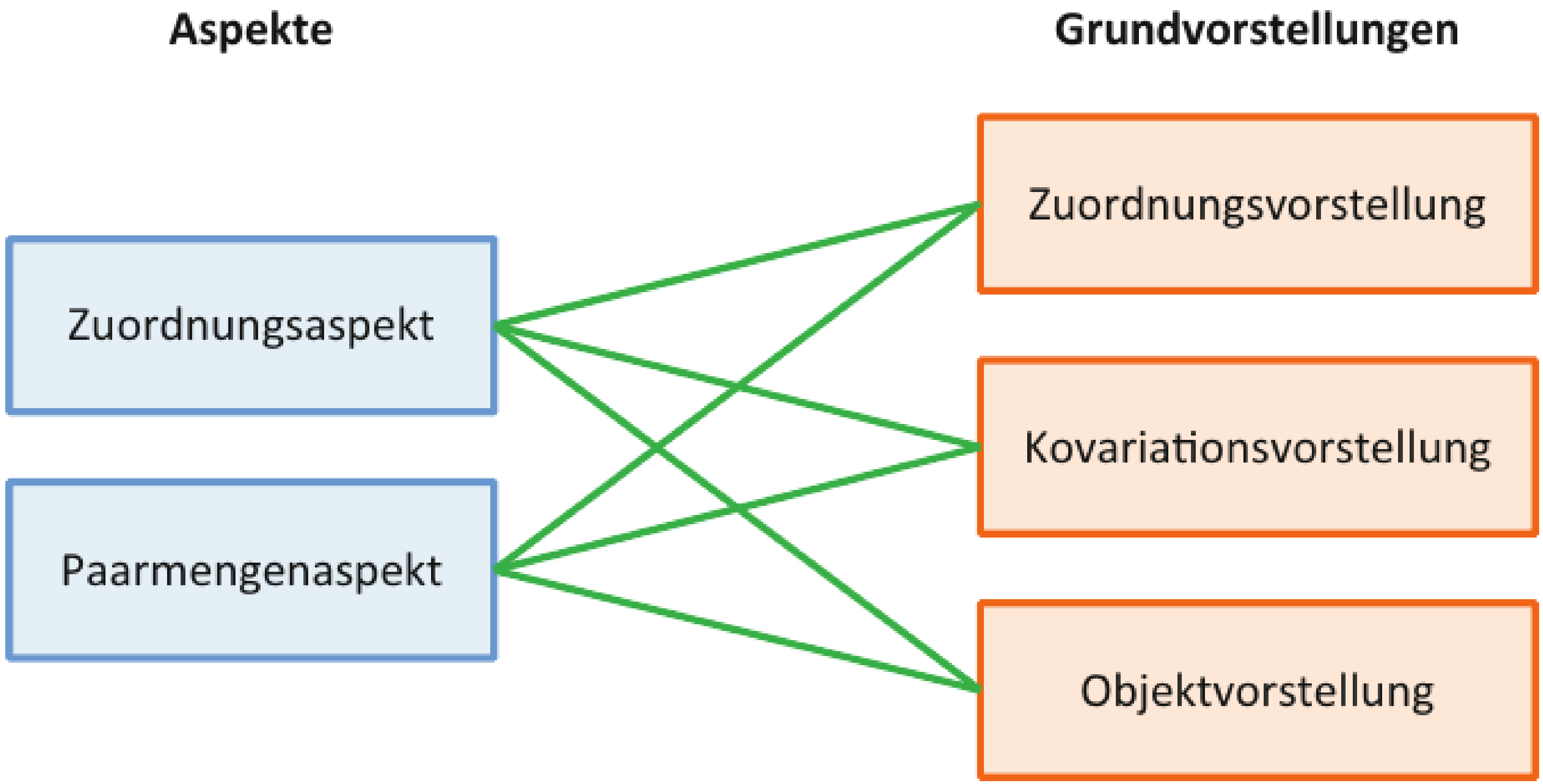
- Begegnungen von Parabeln in realen Situationen in Natur, Technik und Alltag
- innermathematische Anwendungen, z.B. quadratische Zusammenhänge in der Geometrie
- fächerübergreifend (z.B. Bremsweg, schräger Wurf)
- quadratische Funktionen als eine Klasse nicht-linearer Funktionen – hinreichend „einfach“ genug, um Funktionen als Objekte zu untersuchen
- Abstraktionsfähigkeit durch Formalisierung
- Schulung des „funktionalen Denkens“
- Entwickeln der Modellierfähigkeit (?)

Rückblick: Grundvorstellungen von Funktionen



- Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:
  - Welches f(x) gehört zu einem bestimmten x?
  - Welches x gehört zu einem bestimmten f(x)?
- Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:
  - Wie ändert sich f(x), wenn x wächst?
  - Wie muss sich x ändern, damit f(x) fällt?
  - Wie ändert sich f(x) , wenn x verdoppelt wird?
  - Wie muss x geändert werden, damit sich f(x) verdreifacht?
  - Wie ändert sich f(x) , wenn x um l erhöht wird?
  - Wie muss x geändert werden, damit f(x) um 2 erniedrigt wird?

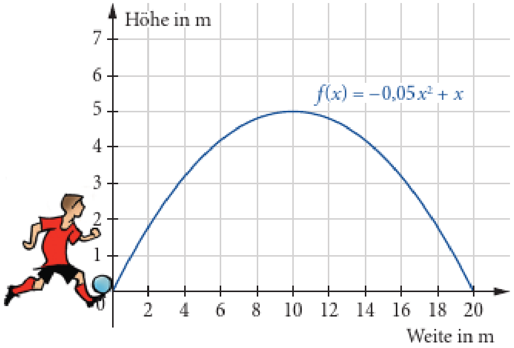
Rückblick: Grundvorstellungen von Funktionen



Rückblick: Grundvorstellungen von Funktionen

- Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:
  - Welches f(x) gehört zu einem bestimmten x?
  - Welches x gehört zu einem bestimmten f(x)?
- Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:
  - Wie ändert sich f(x), wenn x wächst?
  - Wie muss sich x ändern, damit f(x) fällt?
  - Wie ändert sich f(x) , wenn x verdoppelt wird?
  - Wie muss x geändert werden, damit sich f(x) verdreifacht?
  - Wie ändert sich f(x) , wenn x um l erhöht wird?
  - Wie muss x geändert werden, damit f(x) um 2 erniedrigt wird?

Überblick



Was? Welche Inhalte sollen unterrichtet werden

Warum? Bedeutung für Allgemeinbildung usw.

Wie? Umsetzung im Unterricht

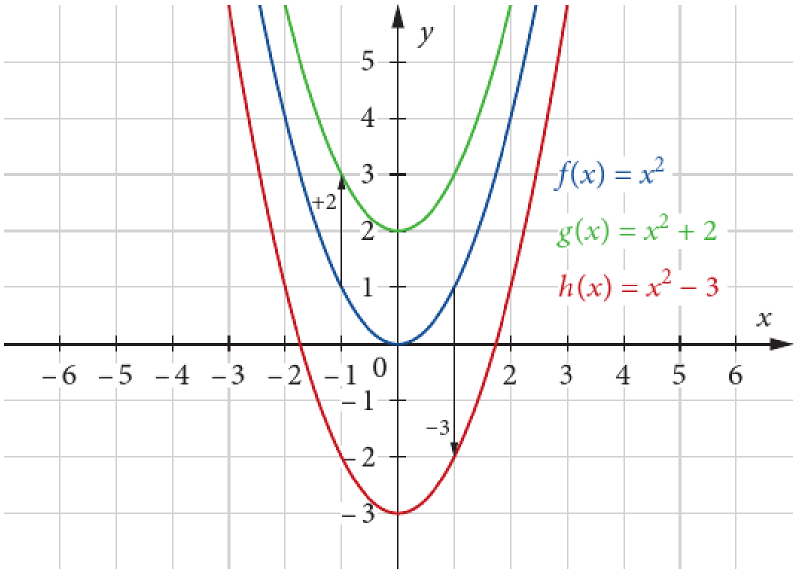
Aufgabenbeispiele

Wie? Didaktische Progression

- Wiederholung der Eigenschaften linearer Funktionen
- Motivierung des Begriffs quadratischer Funktionen (Einführung z.B. über physikalischen Zusammenhang wie Bremsweg)
- Erkennen und Darstellen quadratischer Funktionen
- $y = x^2 \quad \rightarrow \quad y = x^2 + q$
- $\rightarrow y = (x + d)^2 \quad \rightarrow \quad y = (x + d)^2 + e$
- $\rightarrow$ Beziehung zwischen NF $y = x^2 + px + q$ und SPF $y = (x + d)^2 + e$
- $\rightarrow y = a x^2 + q$

QF mit Gleichungen $y = x^2$ und $y = x^2 + q$

- graphische Darstellung der Normalparabel
- Eigenschaften untersuchen
  - Definitions-/ Wertebereich,
  - Symmetrie,
  - Monotonie in einzelnen Intervallen,
  - Tiefpunkt/Scheitelpunkt
  - Existenz von Nullstellen
- Analogie zu
  $y = x \quad \rightarrow \quad y = x + n$



x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18
$h(x)$	13	6	1	−2	−3	−2	1	6	13

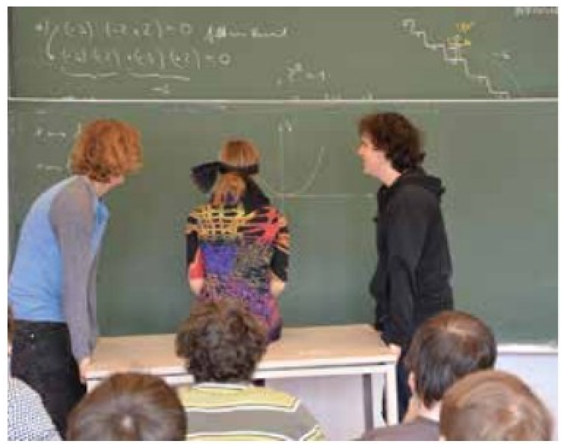
$g(x) = x^2 + 2$ und $h(x) = x^2 - 3$

Schaubilder abfragen über Körperhaltung

Zwischenschritt $y = (x + d)^2$ zur SPF

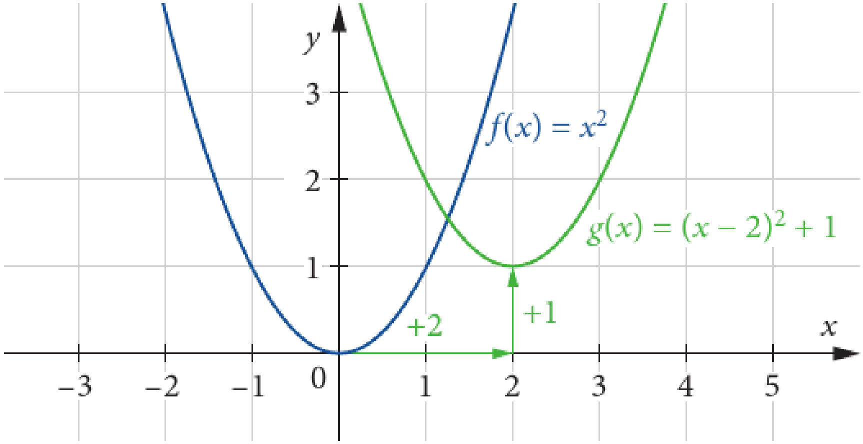
- Einführung der Hilfsform(!) $y = (x + d)^2$
- Einfluss von d auf die Lage des Graphen erkunden
- hilfreich: Wiederholen (LB Terme) der Binome
  - zunächst mit vollständigen Quadraten
    $(x + 4)^2 \longleftrightarrow x^2 + 8x + 16$

Erkunden des Einflusses von d in $y = (x + d)^2$



Scheitelpunktsform SPF $y = (x + d)^2 + e$

- Erkenntnis: nicht alle quadratischen Terme der Form $y = x^2 + px + q$ lassen sich in ein vollständiges Quadrat umformen
- Einfluss des Restsummanden: $y = (x + d)^2 + e$ auf die Lage untersuchen → SPF



$$g(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Beziehung zwischen SPF und NF

- 1. Möglichkeit:

  Ausmultiplizieren der SPF und Vergleich der Koeffizienten

  SPF

  ↓

  NF

- 2. Möglichkeit

  über quadratische Ergänzung

  NF

  ↓

  SPF

Beziehung zwischen SPF und NF

Scheitelpunktform durch quadratische Ergänzung

a) Kira behauptet, die Scheitelpunktform der Funktionen
f und g mit $f(x) = x^2 - 6x + 9$ und $g(x) = x^2 + 2x + 1$
jeweils sofort angeben zu können ohne den Scheitelpunkt
zu bestimmen. Erläutere, wie das funktioniert. (→ setzt Wdhg. bin. Formel vor

b) Um die Scheitelpunktform der Funktion h mit $h(x) = x^2 + 4x - 3$
anzugeben, benutzt Kira einen Trick:

$h(x) = x^2 + 4x - 3$
$h(x) = (x^2 + 4x + 2^2) - 2^2 - 3$
$h(x) = (x + 2)^2 - 7$

Erläutere den Lösungsweg.

Beziehung zwischen SPF und AF

$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ SPF

$f(x) = -2 \cdot (x - 5)^2 + 20$

$= -2 \cdot (x^2 - 10 \cdot x + 25) + 20$

$= -2 \cdot x^2 + 2 \cdot 10\,x - 2 \cdot 25 + 20$

$= -2x^2 + 20x - 50 + 20$

$= -2x^2 + 20x - 30$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ AF

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \quad \blacktriangleright \text{ Scheitelpunktform} \\ &= a \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot x_S + x_S^2) + y_S \\ &= ax^2 \underbrace{- 2ax_S}_{b}x + \underbrace{ax_S^2 + y_S}_{c} \end{aligned}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ▶ allgemeine Form

$b = -2ax_S \quad \Rightarrow \quad x_S = -\frac{b}{2a}$

$c = ax_S^2 + y_S \quad \Rightarrow \quad y_S = c - \frac{b^2}{4a}$

$S\left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$

$y_S = f(x_S)$

Letzter Schritt: y = a x + q

$a = 1$: $f(x) = x^2$

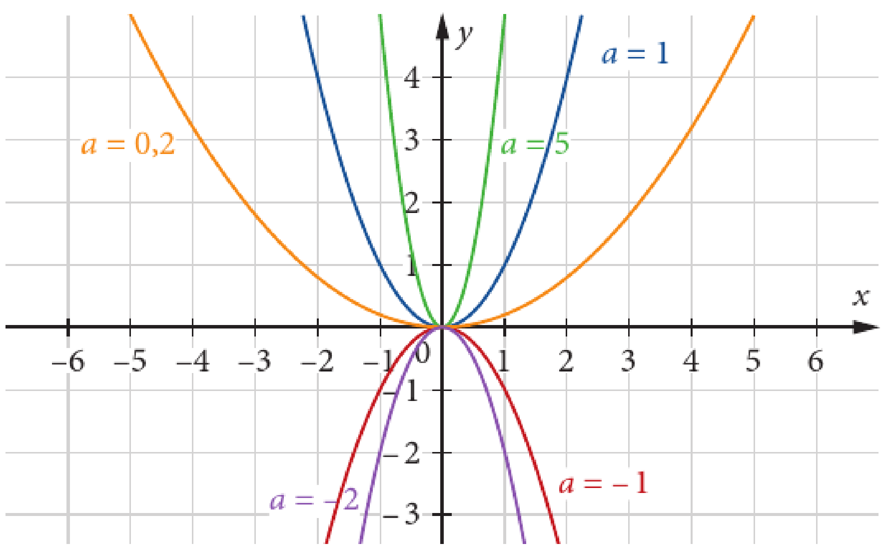
$a = -1$: $g(x) = -x^2$

$a = 5$: $h(x) = 5x^2$

$a = 0{,}2$: $k(x) = 0{,}2x^2$

$a = -2$: $l(x) = -2x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9
$h(x)$	45	20	5	0	5	20	45
$k(x)$	1,8	0,8	0,2	0	0,2	0,8	1,8
$l(x)$	−18	−8	−2	0	−2	−8	−18



Schaubilder abfragen über Körperhaltung

Das lebende Koordinatensystem




Einführung der QF über anwendungsorientierten Zugang: Reaktionsweg, Bremsweg, Anhalteweg

- Schritt 1: Umsetzen einer „Faustformel“ für den Bremsweg in eine Tabelle

$$y = s_b = v^2 \cdot \frac{1}{100}$$

  - Zeichnen eines Graphen
  - Ermitteln von Bremsweg ←→ Geschwindigkeit
- Schritt 2: Beachtung günstiger/widriger Verhältnisse führt zum Faktor a in $y = a\,v^2$
- Schritt 3: Einbau eines Sicherheitsabstandes führt zur Gleichung $y = a\,v^2 + c$
- Schritt 4: Einbau des Reaktionsweges (proportional zu v) führt zu $y = a\,v^2 + bv + c$

Aufgabenbeispiele

3. *Flüsterpost:* Zeichnen Sie den Graphen einer ausgedachten quadratischen Funktion oben auf einem DIN-A4-Blatt in ein Koordinatensystem und geben Sie dieses weiter. In den nächsten Runden führen Sie folgende Schritte aus:

1. Scheitelpunktform notieren
2. allgemeine Form notieren
3. Graph zeichnen

Lassen Sie sich Ihr Blatt zurückgeben und prüfen Sie die Richtigkeit aller Schritte.

mögliche Aufgabentypen

Aufgabe	Real-situat.	Text	Ta-belle	Graph	Glei-chung
Beschreiben, wie eine Parabel aus der Normalparabel hervorgeht, wenn die SPF gegeben ist					
Prüfen, welche Punkte zum Graphen einer Funktion gehören					
Angeben einer Funktionsgleichung bei geg. Scheitelpunkt und Schnittpunkten mit der x-Achse					
Eine Parabel an der x-Achse spiegeln und die Auswirkung auf die Funktionsgleichung untersuchen					
Beschreiben der Lage der Parabel eines Brückenbogens in einem selbstgewählten Koordinatensystem					

Mit Dank fürs Zuhören!

Literatur

- Kramer, M. (2016). Mathematik als Abenteuer. Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Seelze: Klett. S. 60 – 64.
- Krauter, S. (2008). Fachdidaktische Beiträge zur Algebra, S. 24 ff. Online verfügbar.
- Nitsch, R. (2014). Schülerfehler verstehen. Typische Fehlermuster im funktionalen Denken. In: mathematik lehren Heft 187, S. 8 – 11.
- Funktionen haben viele Gesichter (2012). MatheWelt. In: mathematik lehren Heft 170, S. 31 – 33.
- Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl. S. 30 ff.
- Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik Der Analysis: Aspekte Und Grundvorstellungen Zentraler Begriffe. Spektrum Akademischer Verlag. S. 46 – 57.
- Humenberger, H., & Schuppar, B. (2019). Mit Funktionen Zusammenhänge und Veränderungen beschreiben. Spektrum Akademischer Verlag. S. 185 – 231.
- Lehrplan Mitteschule Sachsen (2004) überarbeitet 2009.
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss vom 4.12. 2003
- Bock, H. et al. (1987). Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 9, 1. Aufl. Berlin: Verlag Volk und Wissen.
- Schullehrbücher: Mathematik heute 9. Mittelschule Sachsen. (2015) Schroedel.; Mathematik für die BOS, Bayern. (2017) Cornelsen