

# Strömungsprobleme der Mechanische Verfahrenstechnik

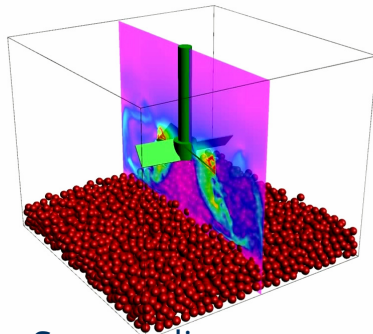
## *Folien zur Vorlesung*

NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH!

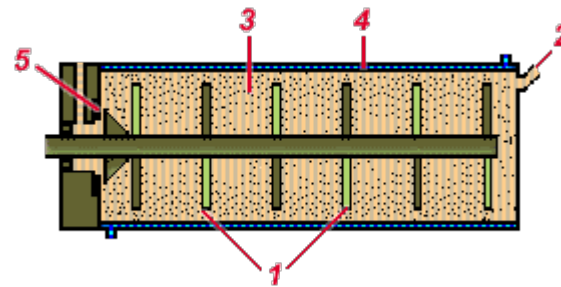
PD Dr.-Ing. habil. Frank Babick, 1. April 2022

# 0. Einführung

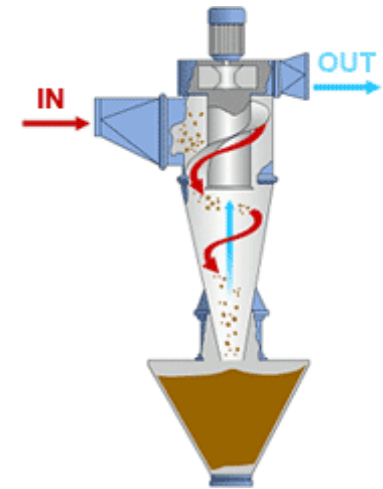
# Typische Strömungsprobleme der MVT



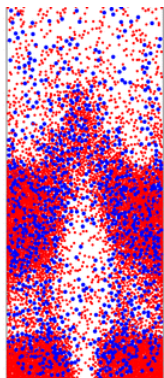
Suspendieren von Partikeln



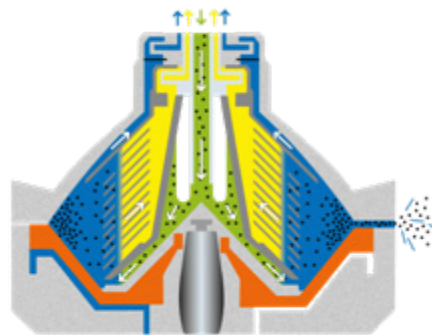
Zerkleinern in Rührwerkskugelmöhlen



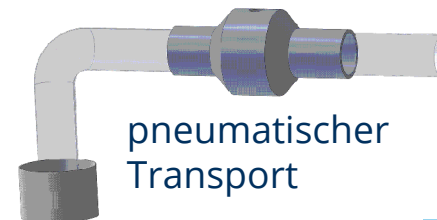
Staubabscheidung mit Aerozyklonen



Wirbelschichten

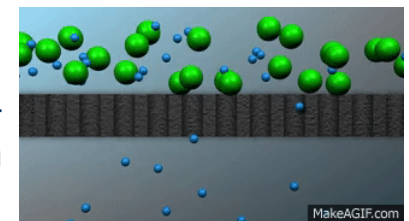


Fest-Flüssig-Trennung mit Zentrifugen



pneumatischer Transport

Querstrom-filtration



- Strömungsprobleme in MVT → Strömung von disperse Systemen oder Einzelpartikeln
- weitere Beispiele: Pumpen von Pasten, Emulgieren, Strömung durch Schüttungen, ...

# Lernziele der Lehrveranstaltung

- Wissen:
  - Vertiefung allgemeiner strömungsmechanischer Kenntnisse, u.a. zu Berechnungsansätzen, Rheologie und Turbulenz
  - gutes Verständnis des strömungsmechanischen Verhaltens von Einzelpartikeln und Partikelsystemen
  - gutes Verständnis von ausgewählten technischen Prozessen, u.a. dem turbulenten Strömungsklassieren, dem Dispergieren in Strömungsfeldern, dem Fluidisieren von Partikelsystemen sowie dem pneumatischen Transport von Schüttgütern
- Fähigkeiten:
  - Berechnen von Transportprozessen
  - Auslegung von technischen Apparaten
  - Auswahl geeigneter technischer Lösungen

# Gliederung der Vorlesung

1. Strömungsmechanische Grundlagen
2. Schleichende Umströmung von Einzelpartikeln
3. Umströmung von Partikelsystemen
4. Fließverhalten von Suspensionen und Emulsionen
5. Turbulente Strömungen
6. Dispergieren von Partikelsystemen
7. Wirbelschichten
8. Pneumatischer Transport

# 1. Strömungsmechanische Grundlagen

# Lernziele zu Kapitel 1

- Wissen:
  - Grundbegriffe (z.B. ideale oder inkompressible Strömung)
  - Kontinuitätsgleichung
  - Inhalt der Navier-Stokes-Gleichungen
- Fähigkeiten:
  - Umgang mit den Operatoren *Gradient*, *Divergenz*, *Rotation*
  - Vereinfachung der N-St-Gleichungen für gegebene Strömungsprobleme

# Eigenschaften von Fluiden

- Daniel Bernoulli (1738) – ideale Fluide

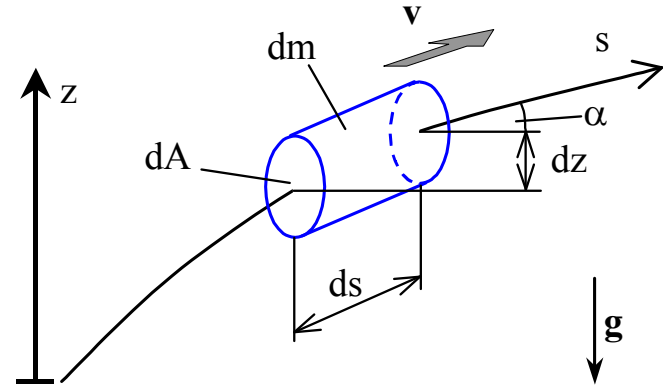
*Fluidorum autem elasticorum præcipuæ affectiones in eo positæ sunt: 1o, ut sint gravia; 2o, ut se in omnes plagas explicent, nisi contineantur, et 3o, ut se continue magis magisque comprimere patiantur crescentibus potentiis compressionis: ita comparatus est aër, ad quem potissimum presentes nostræ pertinent cogitationes*

- ideale Fluide
  - unterliegen Schwerkraft (und sind träge)
  - expandieren in alle Richtungen, falls nicht daran gehindert
  - sind kompressibel
- reale Fluide
  - sind außerdem zäh (d.h., unterliegen inneren Reibungskräften)

# Euler-Gleichungen

## nach Leonard Euler (1707–1783)

- Inhalt:
  - Bewegung eines Fluidelementes
- Annahme:
  - ideale Strömung
  - externer Beobachter



- Beispiel für 1-dimensionale Strömung

- ortsfeste Bewegungsgleichung:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = -g \cdot \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

- ortsfeste Energiegleichung:

$$ds \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -g \cdot dz - \frac{dp}{\rho}$$

mit  $s$  Ortskoordinate,  $z$  Höhenkoordinate,  $g$  Fallbeschleunigung,  $\rho$  Fluiddichte

# Bernoulli-Gleichungen

nach Daniel Bernoulli (1700–1782)

- Inhalt:
  - Veränderung entlang eines Stromfadens  
(= Veränderung am bewegten Fluidelement)
  - aus Integration der Euler-Gleichung
- Annahme:
  - ideale Strömung

- Ergebnis

- original: 
$$\rho g \cdot z + p + \frac{\rho}{2} v^2 = konst.$$

- „technisch“: 
$$\rho g \cdot z_1 + p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \Delta p_P = \rho g \cdot z_2 + p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p_V$$

$\rho$  statischer Druck,  $\Delta p_P$  Pumpendruck,  $\Delta p_V$  Druckverlust

# Navier-Stokes-Gleichungen

n. C. Louis M. H. Navier (1785-1836) & G. Gabriel Stokes (1819-1903)

- Inhalt:
  - Erhaltungsgleichungen für den Impuls in reibungsbehafteten Strömungen
- Annahmen:
  - laminare Strömung, Linearität zw. Scherrate und Spannung isotrope Fluide
- Ergebnis für kartesische Koordinaten

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \cdot \mathbf{f} - \nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Trägheit = Volumenkraft + Druckkraft + Widerstand gegen Formänderung +  
Widerstand gegen Volumenänderung

*alternative Darstellung  
der linken Seite:*

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \otimes \mathbf{v} \right) = \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$$

# Zur Herleitung der N-St-Gleichungen

- allg. Transport-Bilanz-Gleichung: 
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\operatorname{div}(\Gamma \mathbf{v}) - \operatorname{div}(-k_L \operatorname{grad} \Gamma) + \dot{q}_{\text{Quelle}}$$

- Impulstransport in x-Richtung: 
$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho v_x \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{\Pi}_x) + \rho \cdot f_x$$

Impulsänderung resultiert aus konvekt. Beschleunigung, Spannungen & äußeren Kräften

- Spannungstensor 
$$\mathbf{\Pi} = -p \mathbf{I} + \mathbf{\Pi}^{\text{diss}}$$

- Materialgesetz:  
(linearer Ansatz für isotrope Fluide ohne „Belastungsgedächtnis“)

$$\mathbf{\Pi}^{\text{diss}} = 2\eta \mathbf{D} + \lambda^* (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{I}$$

anstatt der Lamé-Konstante  $\lambda^*$  wird meist die Volumen-/ zweite Zähigkeit  $\zeta$  genutzt:  $\zeta = \lambda^* + \frac{2}{3}\eta$

$$\Pi_{ij}^{\text{diss}} = \eta \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \cdot \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

- Tensor der Scherrate: 
$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

- Impulstransport in x-Richtung: 
$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi}_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \Delta v_x + \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

# Erhaltungsgleichungen für Masse und Energie

- Masseerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

- allgemein: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

- inkompressibel: 
$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

- Energieerhaltung:

- kartes. Koordinaten: 
$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e \right) = \Phi - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \lambda \nabla T$$

- Dissipationsrate: 
$$\Phi = \Pi_{ij}^{\text{diss}} D_{ij} = \lambda^* (\operatorname{sp} \mathbf{D})^2 + 2\eta \operatorname{sp} \mathbf{D}^2$$

mit  $e$  Energiedichte,  $\lambda$  Wärmeleitfähigkeit,  $T$  Temperatur  
 $\operatorname{sp} = \text{Spur (engl. trace } tr)$  einer quadratischen Matrix

# Arbeiten mit den Navier-Stokes-Gleichungen

- Randbedingungen (bestimmen die Lösungseigenschaften)

- Geschwindigkeit an Wänden:  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}_{\text{Wand}}) = \mathbf{u}_{\text{Wand}} + \mathbf{v}_{\text{slip}}$   
(keine Strömung senkrecht zur Wand, i.d.R. Wandhaftung  $\mathbf{v}_{\text{slip}} = 0$ )

- Reibungskraft auf ebene Wand:  $F_{\text{Wand},x} = \int_{A_{\text{Wand}}} \Pi_{xz}^{\text{diss}} dA$  (auf x-y-Ebene in x-Richtung)

- Strömungskraft auf Kugel:  $\mathbf{F}_{\text{Kugel}} = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$  (sowohl Druck als auch Reibung)

- Vereinfachungen:

- inkompressibel ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ):  $\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \cdot \mathbf{f} - \nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{v}$

- stationär ( $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ ) + inkompr.:  $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \cdot \mathbf{f} - \nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{v}$

- schleichend ( $Re < 1$ ) + inkompr.:  $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \cdot \mathbf{f} - \nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{v}$

- ideal (reibungsfrei,  $Re \gg 1$ ):  $\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \cdot \mathbf{f} - \nabla p$   
(Euler-Gleichungen)

# Literatur zu Kapitel 1

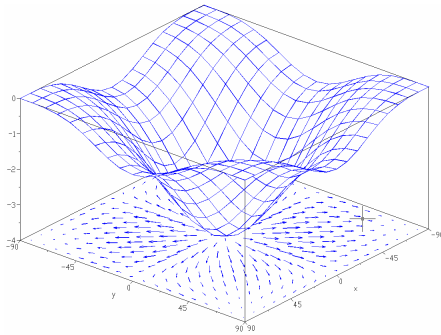
- G. Naue (Hrsg.): *Technische Strömungsmechanik I*, 3. Aufl.; aus der Reihe: *Verfahrenstechnik*; Dt. Verl. der Grundstoffindustrie, Leipzig, **1983**.  
→ Kap. 2, 3 und 4
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz. *Hydrodynamik*; aus der Reihe: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*; Akademie Verlag, Berlin, **1991**.  
→ Kap. I und II
- H. Oertel, M. Böhle, T. Reviol: *Strömungsmechanik*, 6. Aufl.; Vieweg+Teubner, Springer Fachmedien, Wiesbaden, **2011**; doi:10.1007/978-3-8348-8110-6.  
→ Kap. 3
- J. H. Spurk, N. Aksel, *Strömungslehre. Einführung in die Theorie der Strömungen*, 8. Aufl.; Springer, Heidelberg, **2010**; doi:10.1007/978-3-642-13143-1  
→ Kap. 2, 3 und 4

# 1. Strömungsmechanische Grundlagen

## - Anhang -

# Differentialoperatoren

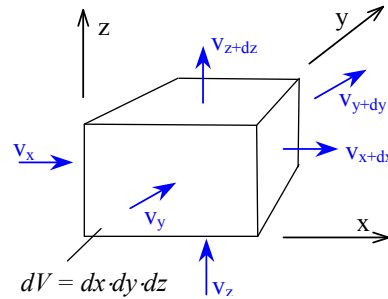
## Gradient eines skalaren Feldes



$$\mathbf{y} = \text{grad } f$$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f$$

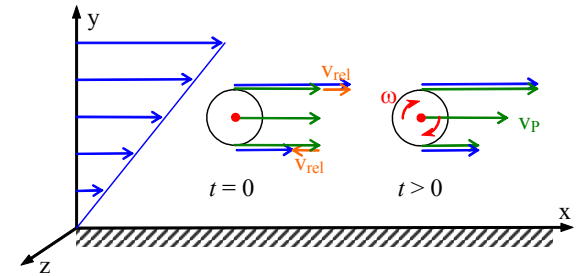
## Divergenz eines Vektorfeldes



$$\mathbf{y} = \text{div } \mathbf{f}$$

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{f}$$

## Rotation eines Vektorfeldes



$$\mathbf{y} = \text{rot } \mathbf{f}$$

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{f}$$

Integralsatz von Gauß

$$\int_V \text{div}(\mathbf{f}) dV = \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

Integralsatz von Stokes

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

# Gradient

- Beispiel:

- Verteilung des statischen Drucks  $p$  im dreidimensionalen Raum
- am Bezugspunkt  $\mathbf{r}_0$  gilt  $p(\mathbf{r}_0) = p_0$  an einer zweiten Stelle  $\mathbf{r}_1$  gilt  $p(\mathbf{r}_1) = p_1$

- totales Differential:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz$$

- Druckänderung von  $\mathbf{r}_0$  zu  $\mathbf{r}_1$ :

$$\Delta p \approx \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

$$\Delta p \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

- Ableitung in beliebige Raumrichtung:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

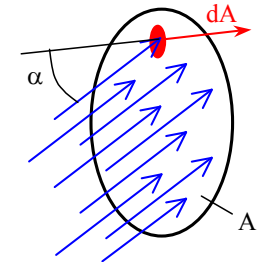
- Gradient für kartes. Koordinaten:

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

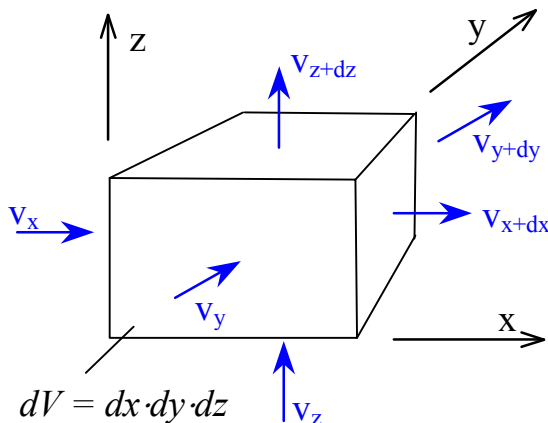
# Divergenz

- Massestrom durch einen Fläche:

$$\dot{m} = \int \rho \mathbf{v} \cdot \cos \alpha \cdot dA = \int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$



- Massenbilanz an einem Volumenelement:



$$\left( \frac{\partial dm}{\partial t} \right)_x = ((\rho \mathbf{v})_x - (\rho \mathbf{v})_{x+dx}) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\left( \frac{\partial dm}{\partial t} \right)_y = ((\rho \mathbf{v})_y - (\rho \mathbf{v})_{y+dy}) \cdot dx \cdot dz = -\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\left( \frac{\partial dm}{\partial t} \right)_z = ((\rho \mathbf{v})_z - (\rho \mathbf{v})_{z+dz}) \cdot dx \cdot dy = -\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\frac{\partial dm}{\partial t} = \sum \left( \frac{\partial dm}{\partial t} \right)_k = -\left( \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) \cdot dV = -\text{div}(\rho \mathbf{v}) \cdot dV$$

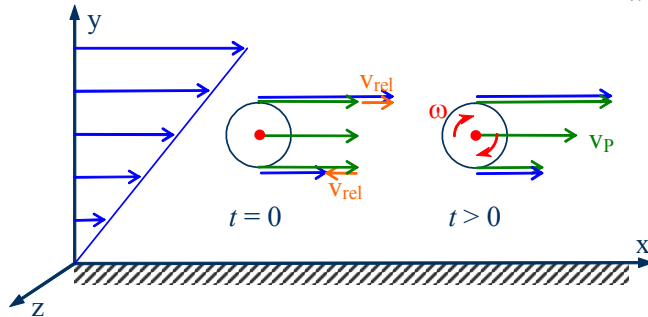
- Divergenz für kartes. Koordinaten:

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

# Rotation

## (vereinfachende Beschreibung)

- Partikel in wandnaher Strömung  $v_x(y)$  (an der Wand ruht das Fluid)



$$v_{rel} = dy \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \omega \right)$$

$$v_{rel} = 0 \leftarrow \omega = - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Das Partikel wird mit Strömung mitgeführt ( $\rightarrow$  Translation). Außerdem fängt es an um die z-Achse zu rotieren, um die Reibungskräfte auf seiner Oberfläche zu minimieren ( $v_{rel} \rightarrow 0$ ). Im Beispiel ist der Drehsinn negativ (Rechte-Hand-Regel).

- Winkelgeschwindigkeit des Partikels  $\leftarrow$  Rotation der Strömung

- im Beispiel:  $\omega_z = - \frac{\partial v_x}{\partial y}$

- allg.  $\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$

- für alle Achsen:  $\text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$

- Zirkulation = Summe der Relativgeschwindigkeit entlang einer geschlossenen Kurve C

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

# Nabla-Operator $\nabla$ und Laplace-Operator $\Delta$

- Nabla-Operator: 
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$
- ermöglichte einfache Darstellung der Differentialoperatoren für kartes. Koordinaten
  - Gradient: 
$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f$$
  - Divergenz: 
$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \nabla \bullet \mathbf{f}$$
  - Rotation: 
$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{f}$$
- Laplace-Operator: 
$$\text{div grad } f = \Delta f \quad (\text{Divergenz eines Gradientenfeldes})$$
  - kart. Koordinaten: 
$$\Delta f = \nabla \bullet \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

# Rechenregeln für die Differentialoperatoren

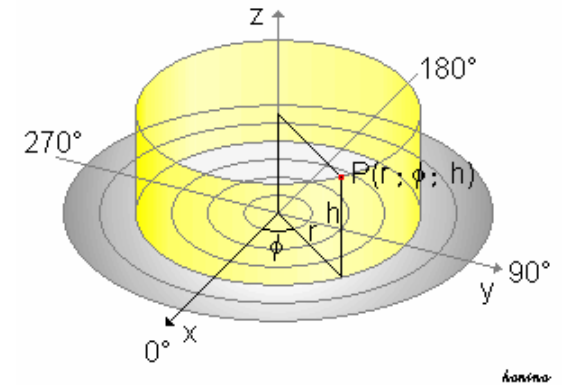
- Distributivgesetz:  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$   $\text{grad}(f + g) = \text{grad} f + \text{grad} g$   
 $\nabla \bullet (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \nabla \bullet \mathbf{f} + \nabla \bullet \mathbf{g}$   $\text{div}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \text{div} \mathbf{f} + \text{div} \mathbf{g}$
- Kettenregel  $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla$   
 $\nabla \bullet (g \cdot \mathbf{f}) = g \cdot \nabla \bullet \mathbf{f} + \nabla g \bullet \mathbf{f}$
- weiterhin gilt:  $\text{rot grad } f = \nabla \times \nabla f = 0$   $\text{div rot } \mathbf{f} = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$

# Krummlinige Koordinaten

- Zylinderkoordinaten:

- Basisvektoren:  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$
- in kartes. Koordinaten

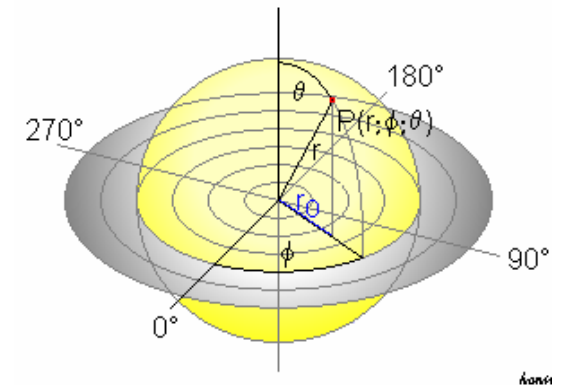
- Radius:  $\mathbf{e}_r = (\cos \phi \quad \sin \phi \quad 0)$
- Azimut ( $0 \dots 2\pi$ ):  $\mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi \quad \cos \phi \quad 0)$
- Höhe:  $\mathbf{e}_z = (0 \quad 0 \quad 1)$



- Kugelkoordinaten:

- Basisvektoren:  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$
- in kartes. Koordinaten

- Radius:  $\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta)$
- Azimut ( $0 \dots 2\pi$ ):  $\mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi \quad \cos \phi \quad 0)$
- Polarwinkel ( $0 \dots \pi$ ):  $\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi \quad \cos \theta \sin \phi \quad -\sin \theta)$



# Navier-Stokes für Zylinderkoordinaten

- für inkompressible Fluide
  - in radialer Richtung ( $r$ )

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) = \rho \cdot f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \cdot \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right)$$

- in azimuthaler Richtung ( $\phi$ )

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi}{r} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r \cdot v_\phi}{r} \right) = \rho \cdot f_\phi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} + \eta \cdot \left( \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right)$$

- in axialer Richtung ( $z$ )

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho \cdot f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \cdot \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

# Navier-Stokes für Kugelkoordinaten

- für inkompressible Fluide
  - in radialer Richtung ( $r$ )

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = \rho \cdot f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \cdot \left[ \Delta v_r - \frac{2 \cdot v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial (v_\theta \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]$$

- in polarer Richtung ( $\theta$ )

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cdot \cot \theta}{r} \right) = \rho \cdot f_\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \cdot \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} - \frac{2 \cdot \cos \theta}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right)$$

- in azimuthaler Richtung ( $\phi$ )

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r \cdot v_\phi}{r} + \frac{v_\theta \cdot v_\phi \cdot \cot \theta}{r} \right) = \rho \cdot f_\phi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} + \eta \cdot \left( \Delta v_\phi + \frac{2}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cdot \cos \theta}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \right)$$

# Analogie zur Festkörpermechanik

## Verzerrung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \begin{array}{l} i=j \rightarrow \text{Kompression} \\ i \neq j \rightarrow \text{Scherung} \end{array}$$

## Hook'scher Körper

$$\text{Kompression: } \sigma_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{Scherung (i≠j): } \tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} = \mu \cdot \gamma_{ij}$$

## elastische Materialeigenschaften

$$\text{erste Lamé-Konstante: } \lambda$$

$$\text{Schermodul (2. Lamé-K.): } \mu = G$$

$$\text{Kompressionsmodul: } K = \lambda + \frac{2}{3}G$$

## Impulstransport und Impulsbilanz

$$\sigma_{ij}^D = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \lambda = K - \frac{2}{3}G$$

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = G \cdot \Delta \mathbf{u} + \left( K + \frac{1}{3}G \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

## Scherrate (Deformationsrate)

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \begin{array}{l} i=j \rightarrow \text{Kompr./Dehnung} \\ i \neq j \rightarrow \text{Scherung} \end{array}$$

## Newton'sches Fluid

$$\text{Kompression: } \Pi_{ii}^{\text{diss}} = 2\eta D_{ii} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{Scherung (i≠j): } \Pi_{ij}^{\text{diss}} = 2\eta D_{ij} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{ij}$$

## viskose Materialeigenschaften

$$\text{erste Lamé-Konstante: } \lambda^*$$

$$\text{Scherviskosität: } \eta \quad (\text{auch: } \mu)$$

$$\text{Volumen-/Druckzähigkeit: } \zeta = \lambda^* + \frac{2}{3}\eta$$

## Impulstransport und Impulsbilanz

$$\Pi_{ij}^{\text{diss}} = 2\eta \cdot D_{ij} + \lambda^* \cdot \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \lambda^* = \zeta - \frac{2}{3}\eta$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \cdot \mathbf{f} - \nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$