2 Aufgabe 2.2

2.1 Aufgabenstellung

Ein Balken wird im Punkt A durch ein 2-wertiges Lager und in Punkt C durch einen Stab gelenkig gelagert, Abbildung 1. Der Stab ist seinerseits in D an ein 2-wertiges Lager angeschlossen. In Punkt B wird das System durch eine Kraft $F = 30$ kN belastet.

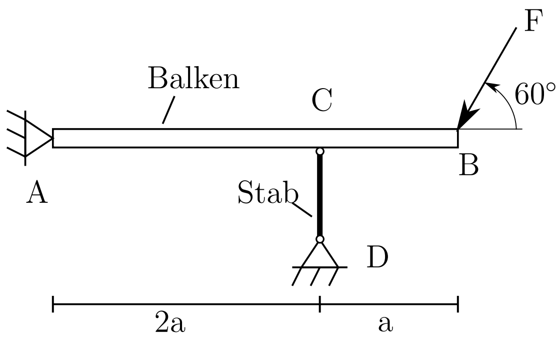

Abbildung 1: Aufgabe 2.2

1. Gegeben: $F = 30$ kN, $a = 1$m
2. Gesucht: Lagerreaktionen der Lager in A und D

2.2 Lösungsvorschlag

Für die Lösung der Aufgabe wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

1. Prüfung der Statischen Bestimmtheit n
2. Entwicklung eines Ersatzsystems
3. Freischnitt am Ersatzsystem
4. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen
5. Lösen der Gleichgewichtsbedingungen

2.2.1 Prüfung der Statischen Bestimmtheit n

Die Statische Bestimmtheit eines Systems wird nach Kapitel 2 des Vorlesungsskriptes[1] definiert durch

$$n = c + g - b \tag{1}$$

mit c der Anzahl an Lagerreaktionen, g der Anzahl an Gelenkreaktionen und b der Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen.

Für das Gesamtsystem gilt

1. Anzahl an Lagerreaktionen: 2x 2-wertiges Lager $c = 2 \cdot 2 = 4$
2. Anzahl an Gelenkreaktionen: keine Gelenke vorhanden $g = 0$
3. Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen: Ebene Betrachtung, 1 Körper $b = 3$

Die Statische Bestimmtheit des Gesamtsystems ergibt sich somit zu

$$n = c + g - b = 4 + 0 - 3 = 1 \quad \rightarrow \quad \text{statisch unbestimmt} \tag{2}$$

Das Gesamtsystem lässt sich laut Berechnungsformel zunächst nicht eindeutig lösen. Wird jedoch berücksichtigt, dass der in C angeschlossene Stab nur in der Lage ist, Längskräfte vom Balken in das Lager D zu übertragen, so wird klar, dass die horizontale Komponente der Lagerkraft $F_{DH} = 0$ sein muss, was durch den Freischnitt der Stabkraft in Abbildung 2 klar wird.

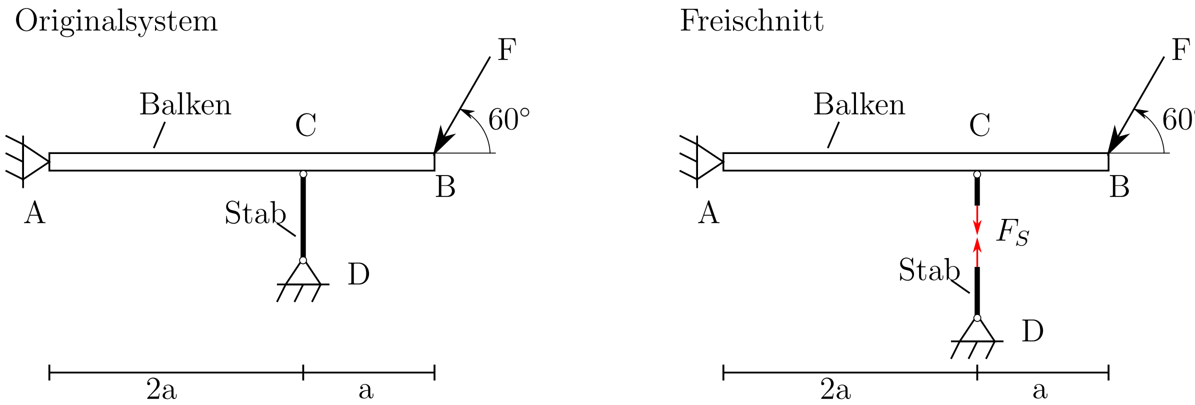

Abbildung 2: Freischnitt der Stabkraft

[1]In Kapitel 5 der Vorlesungsunterlagen wird die Gleichung für n entsprechend um die Anzahl an Stäben s erweitert, wodurch das System als „Statisch Bestimmt" berechnet und 2.2.2 übersprungen werden kann.

2.2.2 Entwicklung eines Ersatzsystems

Das System aus Stab + 2-wertiges Lager D wirkt auf den Balken wie ein 1-wertiges, vertikales Lager in Punkt C. Für die weitere Berechnung der Lagerreaktionen ist es deshalb sinnvoll, ein Ersatzsystem zu entwickeln, Abbildung 3, welches die Kombination aus Stab + 2-wertiges Lager durch ein 1-wertiges Lager ersetzt.

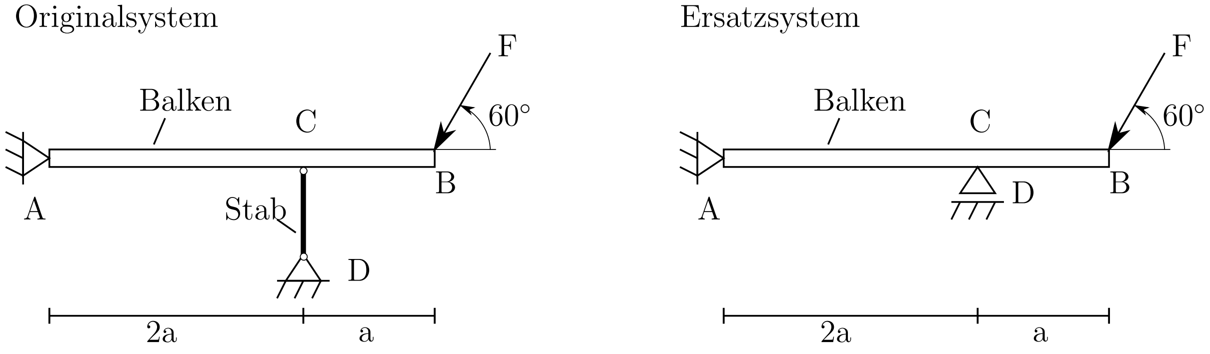

Abbildung 3: Entwicklung eines Ersatzsystems

Für das Ersatzsystem gilt dann

1. Anzahl an Lagerreaktionen: 1x 2-wertiges Lager und 1x1-wertiges Lager $c = 2 + 1 = 3$
2. Anzahl an Gelenkreaktionen: keine Gelenke vorhanden $g = 0$
3. Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen: Ebene Betrachtung, 1 Körper $b = 3$

Die Statische Bestimmtheit des Ersatzsystems ergibt sich somit zu

$$n = c + g - b = 3 + 0 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{statisch bestimmt} \tag{3}$$

Das Ersatzsystem ist somit lösbar.

2.2.3 Freischnitt am Ersatzsystem

Für die Berechnung der Lagerreaktionen wird zunächst ein geschlossener Freischnitt des Ersatzsystems gebildet. Die Schnittkräfte der Lager A und D müssen hierfür an den Balken angetragen werden, Abbildung 4. Außerdem werden die horizontalen und vertikalen Komponenten von $\vec{F}$ in B mit angetragen.

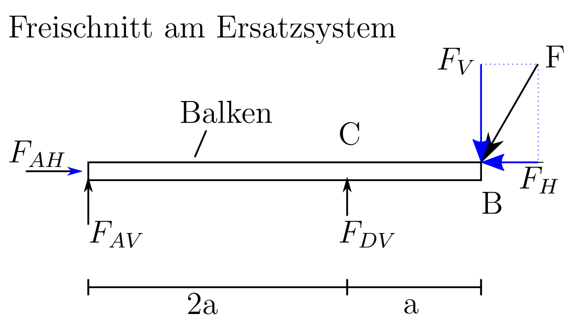

Abbildung 4: Freischnitt am Ersatzsystem

2.2.4 Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

Für den in Abbildung 4 dargestellten Freischnitt können zunächst die Kräftegleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad & F_{AH} - F_H = F_{AH} - F \cdot \cos(60°) && = 0 \\ \uparrow: \quad & F_{AV} + F_{DV} - F_V = F_{AV} + F_{DV} - F \cdot \sin(60°) && = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Das Momentengleichgewicht kann an jeden beliebigen Punkt des Balkens gebildet werden. Es ist sinnvoll, das Momentengleichgewicht an einem Punkt zu bestimmen, an dem bereits mehrere unbekannte Kräfte angreifen bzw. durch den mehrere Wirkungslinien (WL) verlaufen. Für diese Kräfte sind die entsprechenden Hebelarme und somit auch die resultierenden Momente =0. Abbildung 5 zeigt deutlich, dass das Momentengleichgewicht um alle drei Punkte A, B und

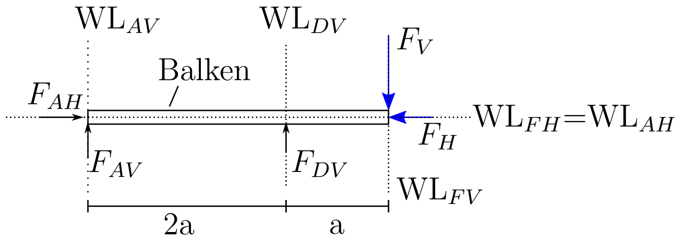

Abbildung 5: Freischnitt am Ersatzsystem

C gebildet werden kann und jeweils die horizontalen Kräfte einen Hebelarm =0 aufweisen. Da die Kraftkomponenten $\vec{F}_H$ und $\vec{F}_V$ bekannt sind, ist es sinnvoll das Momentengleichgewicht in Punkt A oder C zu bilden, da so jeweils nur eine Unbekannte im Momentengleichgewicht entsteht. Für das Momentengleichgewicht in Punkt A gilt ($\curvearrowleft$ =gegen den Uhrzeigersinn drehende Momente werden positiv gezählt, im Uhrzeigersinn drehende Momente negativ):

$$\overset{\curvearrowleft}{A} : F_{DV} \cdot 2a - F_V \cdot 3a = F_{DV} \cdot 2a - F \cdot \sin(60°) \cdot 3a = 0 \tag{5}$$

Alternativ gilt für ein Momentengleichgewicht in Punkt C

$$\overset{\curvearrowleft}{C} : -F_{AV} \cdot 2a - F_V \cdot 3a = 0 \tag{6}$$

2.2.5 Lösen der Gleichgewichtsbedingungen

Das Lösen der Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{array}{lrcl}
\rightarrow: & F_{AH} - F_H = F_{AH} - F \cdot \cos(60°) & = 0 \\
\uparrow: & F_{AV} + F_{DV} - F_V = F_{AV} + F_{DV} - F \cdot \sin(60°) & = 0 \\
\overset{\curvearrowleft}{A}: & F_{DV} \cdot 2a - F_V \cdot 3a & = 0
\end{array} \tag{7}$$

führt auf die Lagerreaktionen in A und D

$$\begin{array}{llcll}
\rightarrow: & F_{AH} = & F \cdot \cos(60°) & = & 15\ \text{kN} \\
\overset{\curvearrowleft}{A}: & F_{DV} = & F \cdot \sin(60°) \cdot \frac{3}{2} & \approx & 39\ \text{kN} \\
\uparrow: & F_{AV} = & -F \cdot \sin(60°) \cdot \frac{3}{2} + F \cdot \sin(60°) & \approx & -13\ \text{kN}
\end{array} \tag{8}$$

Das negative Vorzeichen der Lagerkraft $\vec{F}_{AV}$ bedeutet, dass diese nicht wie im Freischnitt dargestellt nach oben, sondern mit dem gleichen Betrag nach unten wirkt, Abbildung 6. Die Lagerkraft $\vec{F}_{AV}$ zieht somit den Balken nach unten, um das System im Gleichgewicht zu halten. Würde das Lager A entfernt werden, so würde das System wie eine Wippe wirken. Die Einzelkraft F würde den Balken an der rechten Seite nach unten und damit das linke Balkenende nach oben drücken. Um dem entgegenzuwirken und das System im Gleichgewicht zu halten, muss die Lagerkraft $\vec{F}_{AV}$ das linke Balkenende nach unten ziehen.

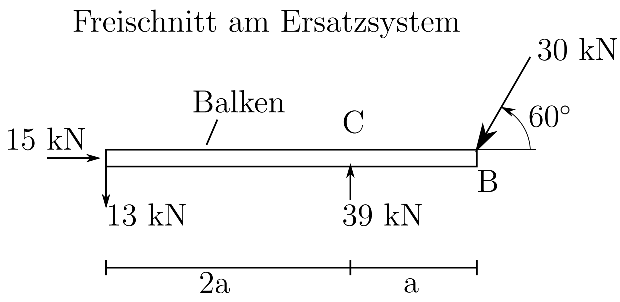

Abbildung 6: Eintrag Lagerkräfte