4 Schnittgrößen

Im Allgemeinen treten eingeprägte Lasten nicht in Höhe der Lager auf, sondern müssen über die Struktur, z.B. einen Balken, in die Lager eingeleitet werden. Dabei entstehen innere Lasten, die als **Schnittgrößen** bezeichnet werden.

4.1 Schnittgrößen des Balkens

4.1.1 Definition

Der Verlauf der Schnittgrößen über die Balkenlänge ist abhängig von der Koordinate in Balkenlängsrichtung z bzw. s und muss nicht konstant sein. Als Schnittgrößen gelten bei ebenen Problemen

1. Längskraft F_L in Stab- bzw. Balkenlängsrichtung
2. Querkraft F_Q senkrecht zur Balkenlängsrichtung
3. Biegemoment M_b

Die Schnittgrößen werden über die komplette Längsrichtung des Systems bestimmt. Zur Bestimmung der Schnittgrößen wird der Balken freigeschnitten. Nach Definition wird zwischen **linkem** und **rechtem System** unterschieden. Die Schnittflächen am Balken werden als **Schnittufer** bezeichnet.

Merke:

1. Merksatz: Ein Mann läuft am linken System den Balken entlang ($\rightarrow F_L$), fällt am Schnittufer herunter ($\downarrow F_Q$) und wird wieder hochgehoben ($\curvearrowleft M_b$).

4.1.2 Abschnittsweise Definition

Teilbereiche sind in den genannten Fällen erforderlich

1. Änderungen in der Belastung, z.B. Einzellast, Beginn oder Ende einer Streckenlast
2. Lager
3. Änderungen in der Geometrie, z.B. Abknicken des Balkens

4.2 © Balke: Technische Mechanik-Statik, Springer, 2010

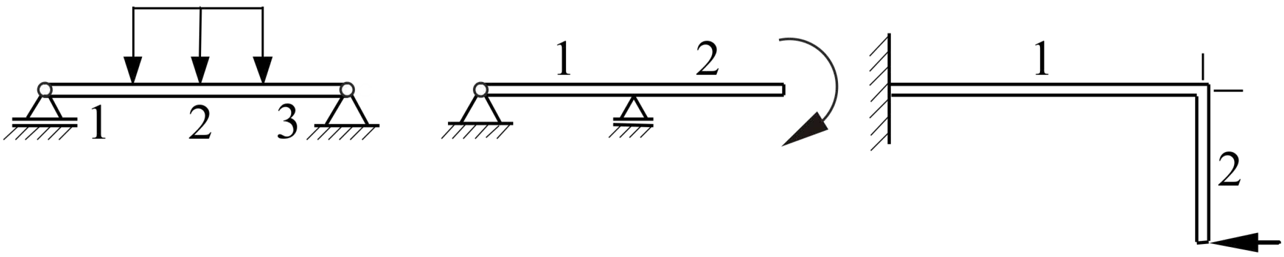


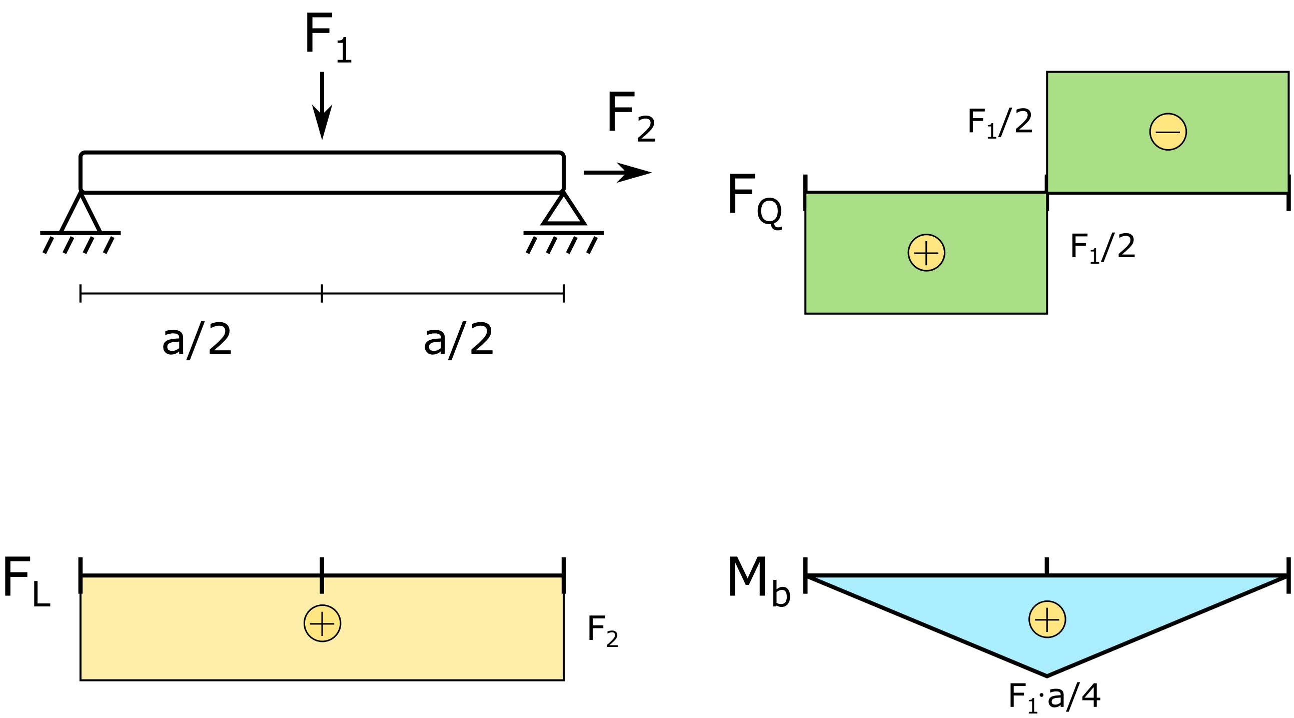
Abbildung 1: Beispiele für die Einführung von Teilbereichen

4.2 Berechnung der Schnittgrößen

Vorgehen:

1. Lagerreaktionen bestimmen
   a) Freischnitt
   b) Gleichgewicht und Lösen
2. Definition von Teilbereichen
3. Für jeden Teilbereich
   a) Freischnitt
   b) Gleichgewicht
   c) Schnittgrößen bestimmen
4. Schnittgrößenverläufe graphisch darstellen
   a) Funktionswerte an den Bereichsgrenzen berechnen
   b) Schaubilder skizzieren
   c) Schnittgrößenverläufe einzeichnen

Beispiel 1

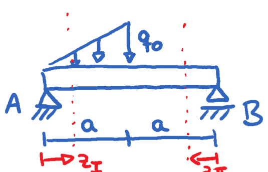


Beispiel 2

Beispiel 3

Beispiel 4

System: Einfeldträger mit linearer Streckenlast

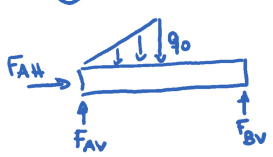


Gegeben: q_0, a

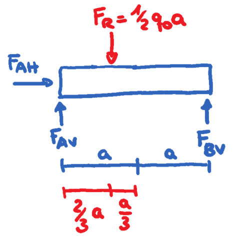
Gesucht: Verläufe der Schnittgrößen

① Lagerreaktionen bestimmen

ⓐ Freischnitt



Ersatzschaubild



ⓑ Gleichgewicht

$\rightarrow: F_{AH} = 0$

$\uparrow: F_{AV} + F_{BV} - F_R = 0$

$\curvearrowleft A: F_{BV} \cdot 2a - F_R \cdot \frac{2}{3}a = 0$

ⓒ Lösen

Aus $\rightarrow$: $F_{AH} = 0$

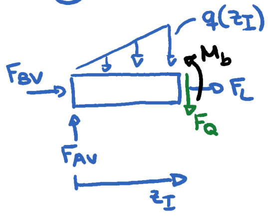
Aus $\curvearrowleft A$: $F_{BV} = \frac{1}{6} q_0 a$

Aus $\uparrow$: $F_{AV} = \frac{1}{3} q_0 a$

③ Teilbereiche lösen

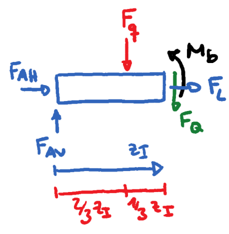
Ⓘ Bereich I am linken System

ⓐ Freischnitt



$q(z_I) = \frac{q_0}{a} \cdot z_I$

Ersatzmodell



$F_q = \frac{1}{2} \frac{q_0}{a} z_I \cdot z_I$

ⓑ Gleichgewicht + Lösen

$\rightarrow: \; F_{AH} + F_L = 0 \Rightarrow F_L = -F_{AH} = 0$

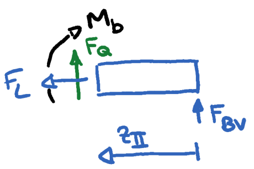
$\uparrow: \; F_{AV} - F_q - F_Q = 0 \Rightarrow F_Q = \underbrace{\frac{1}{3} q_0 a}_{F_{AV}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q_0}{a} \cdot z_I^2}_{F_q}$

$\overset{\curvearrowright}{P}: \; F_{AV} \cdot z_I - F_q \cdot \frac{1}{3} z_I - M_b = 0$

$\Rightarrow M_b = \underbrace{\frac{1}{3} q_0 a \cdot z_I}_{F_{AV} \cdot z_I} - \underbrace{\frac{1}{6} \frac{q_0}{a} z_I^3}_{F_q \cdot \frac{1}{3} z_I}$

Ⓘⓘ Bereich II am rechten System

ⓐ Freischnitt



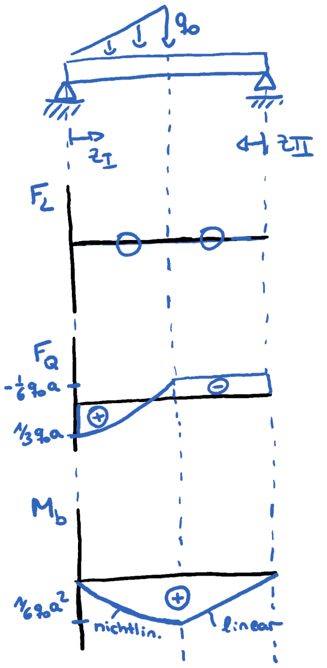
ⓑ Gleichgewicht + Lösen

$\uparrow: \; F_{BV} + F_Q = 0 \Rightarrow F_Q = -\frac{1}{6} q_0 a$

$\rightarrow: \; -F_L = 0$

$\overset{\curvearrowright}{P}: \; M_b - F_{BV} \cdot z_{II} = 0 \Rightarrow M_b = \frac{1}{6} q_0 a \cdot z_{II}$

④ Graphische Darstellung



Bereich I

$0 \leq z_I \leq a$

$F_L = 0$

$F_Q = \underbrace{\frac{1}{3} q_0 a}_{=\text{konstant}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q_0}{a} z_I^2}_{\text{quadratisch}}$

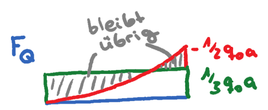
$M_b = \underbrace{\frac{1}{3} q_0 a z_I}_{\text{linear}} - \underbrace{\frac{1}{6} \frac{q_0}{a} z_I^3}_{\text{kubisch}}$

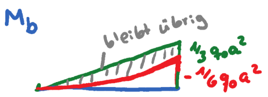
Bereichsgrenzen: $z_I = 0, \; z_I = a$

$F_Q(0) = \frac{1}{3} q_0 a, \; F_Q(a) = \frac{1}{3} q_0 a - \frac{1}{2} q_0 a = -\frac{1}{6} q_0 a$

$M_b(0) = 0, \; M_b(a) = \frac{1}{3} q_0 a^2 - \frac{1}{6} q_0 a^2 = \frac{1}{6} q_0 a^2$

Schaubilder





Bereich II

$0 \leq z_{II} \leq a$

$F_L = 0$

$F_Q = \underbrace{-\frac{1}{6} q_0 a}_{=\text{konstant}}$

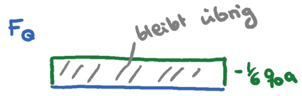
$M = \underbrace{\frac{1}{6} q_0 a z_{II}}_{=\text{linear}}$

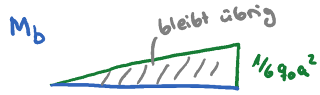
Bereichsgrenzen: $z_{II} = 0, \; z_{II} = a$

$F_Q(0) = -\frac{1}{6} q_0 a = F_Q(a)$

$M(0) = 0, \; M(a) = \frac{1}{6} q_0 a^2$

Schaubilder





Merke:

1. Querkraft- und Momentenverlauf sind nicht unabhängig voneinander. Der Querkraftverlauf entspricht dem abgeleiteten Momentenverlauf.

$$F_Q(z) = \frac{\mathrm{d}M_b}{\mathrm{d}z} \tag{1}$$

   Wird der Balken durch eine Streckenlast $q(s)$ belastet, so gilt für diesen Balkenabschnitt

$$q(s) = -\frac{\mathrm{d}F_Q}{\mathrm{d}s} \tag{2}$$

2. Sprünge in den Verläufen entstehen bei konstantem Querschnitt immer durch eingebrachte Einzellasten.

3. Ob die Verläufe ausgehend vom linken oder rechten System bestimmt werden, ist egal. Hier dürfen sich keine Unterschiede ergeben!

4. An biegesteifen Ecken klappen Momentenverläufe um. Querkraft- und Längskraftverläufe werden vertauscht, wobei sich das Vorzeichen ändern kann.