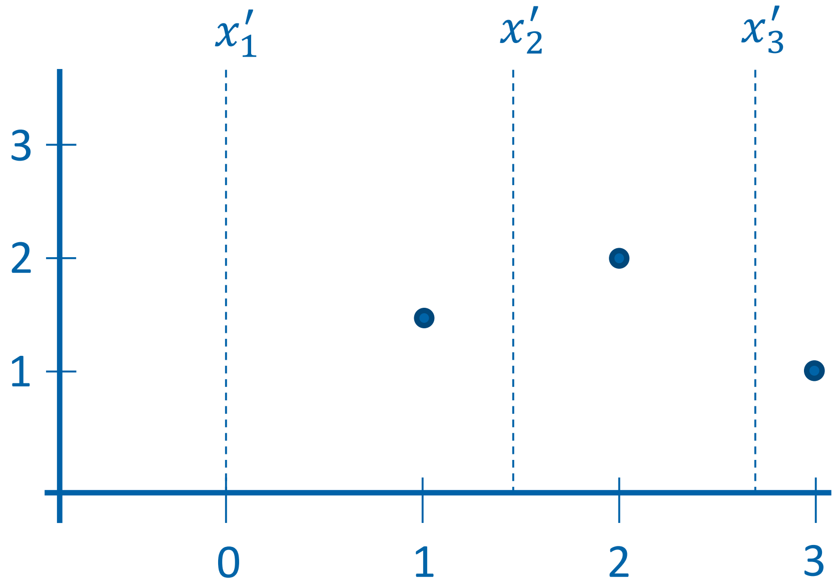
Folgendes Beispiel zum eigenständigen Nachvollziehen

Gegeben:

$$(x_i, f_i) = \begin{cases} (1{,}1.5);\, i = 1 \\ (2{,}2);\, i = 2 \\ (3{,}1);\, i = 3 \end{cases}$$

Gesucht:

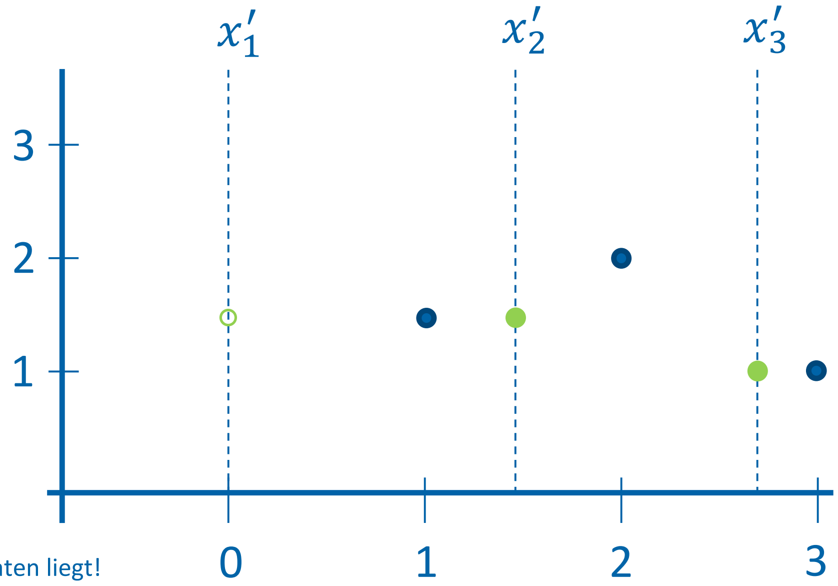
$$(x'_j, \hat{f}_j) = \begin{cases} (0, ?\,);\, j = 1 \\ (1.5, ?\,);\, j = 2 \\ (2.75, ?\,);\, j = 3 \end{cases}$$



Stückweise-konstante Interpolation

$$D_i = \begin{cases} [1,1.5]; i = 1 \\ (1.5,2.5); i = 2 \\ (2.5,3); i = 3 \end{cases}$$

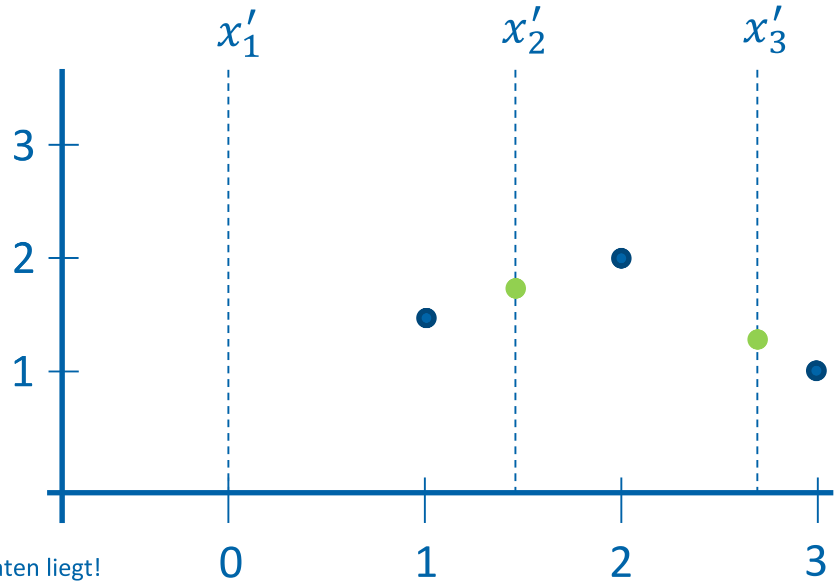
$$\left(x_j', \hat{f}_j\right) = \begin{cases} (0,-/1.5); j = 1 \\ (1.5,1.5); j = 2 \\ (2.75,1); j = 3 \end{cases}$$



Hinweis: $\hat{f}_1$ kann nicht durch Interpolation bestimmt werden, da x_1' außerhalb der Daten liegt!
Stückweise-lineare Interpolation liefert keinen Wert;
Extrapolation: Verwendung des „nächsten“ Intervalls.

Stückweise-lineare Interpolation

$$\hat{f}_j = \begin{cases} - & ; j = 1 \\ \dfrac{2-1.5}{2-1}1.5 + \dfrac{1.5-1}{2-1}2 = 1.75; & j = 2 \\ \dfrac{3-2.75}{3-2}2 + \dfrac{2.75-2}{3-2}1 = 1.25; & j = 3 \end{cases}$$



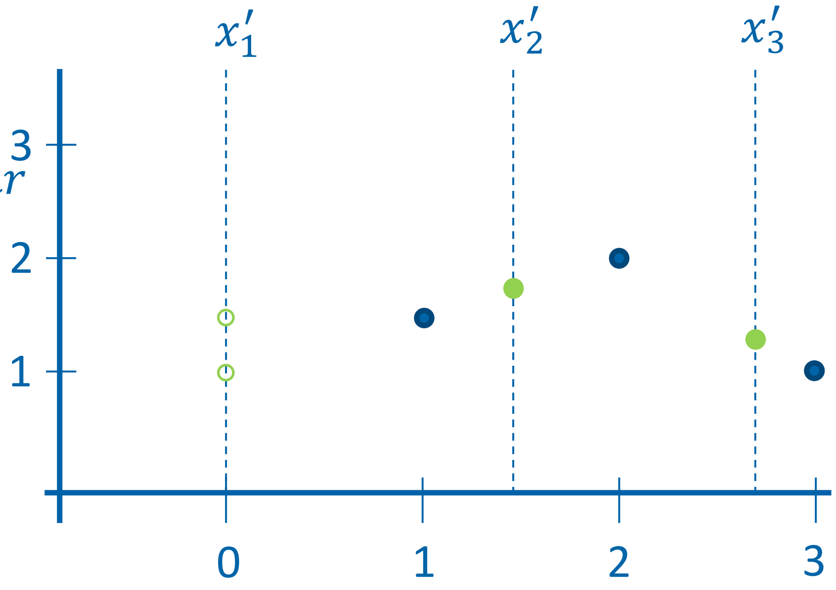
Hinweis: $\hat{f}_1$ kann nicht durch Interpolation bestimmt werden, da x'_1 außerhalb der Daten liegt!
Stückweise-lineare Interpolation liefert keinen Wert;

Stückweise-lineare Interpolation - Extrapolation

$$\hat{f}_1 = \begin{cases} f_1 = 1.5 \;\; Nearest \\ f_1 + m(x_1' - x_1) = 1.5 - 0.5 = 1 \; Linear \end{cases}$$

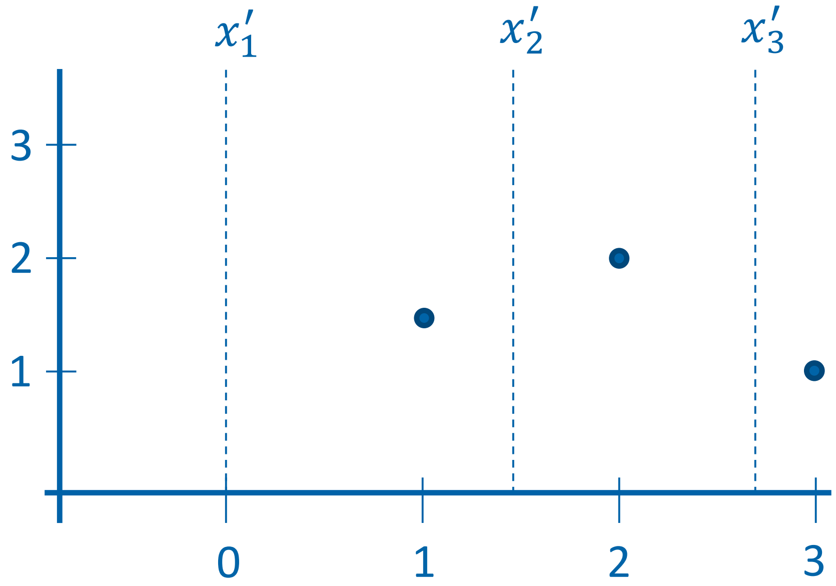
Mit $m = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = 0.5$

Extrapolation:
Entweder Verwendung des „nächsten Wertes“ oder lineare Fortsetzung des „nächsten“ linearen Segmentes.



IDW

$$d(x_i, x_j') = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.75 \\ 2 & 0.5 & 0.75 \\ 3 & 1.5 & 0.25 \end{bmatrix}; p = 1$$



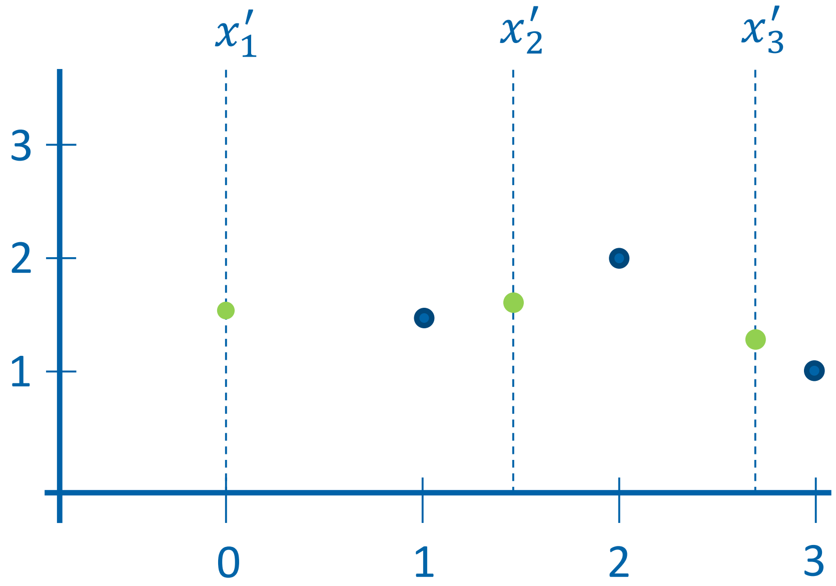
Hinweis: Extrapolation erfolgt hier exakt gleich wie Interpolation. Umso größer die Entfernung zu den Daten, umso stärker nähern sich die extrapolierten Werte dem Mittelwert an.

IDW

$$\hat{f}_1 = \frac{\frac{1}{1}1.5+\frac{1}{2}2+\frac{1}{3}1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{2.833}{1.833} = 1.5456$$

$$\hat{f}_2 = \frac{\frac{1}{0.5}1.5+\frac{1}{0.5}2+\frac{1}{1.5}1}{\frac{1}{0.5}+\frac{1}{0.5}+\frac{1}{1.5}} = \frac{7.667}{4.667} = 1.6428$$

$$\hat{f}_3 = \frac{\frac{1}{1.75}1.5+\frac{1}{0.75}2+\frac{1}{0.25}1}{\frac{1}{1.75}+\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.25}} = \frac{7.5238}{5.9048} = 1.2742$$



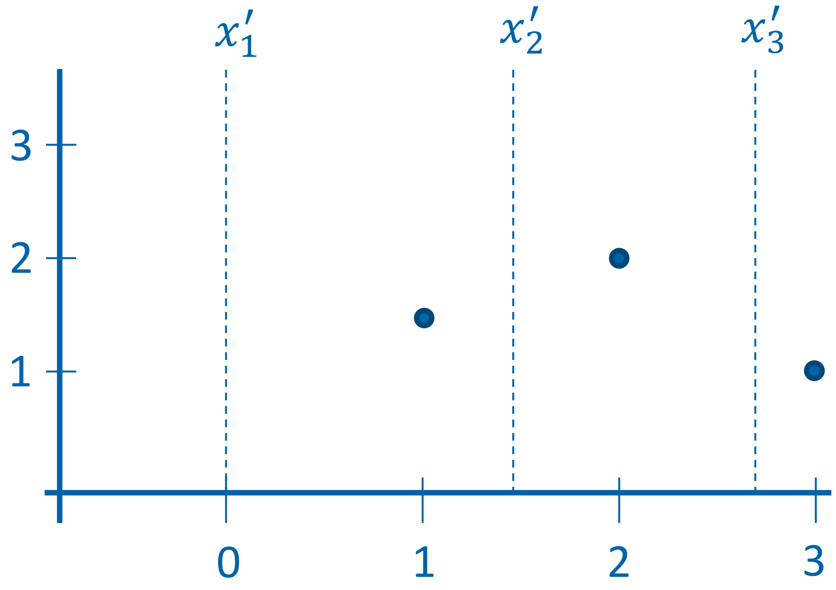
Hinweis: Extrapolation erfolgt hier exakt gleich wie Interpolation. Umso größer die Entfernung zu den Daten, umso stärker nähern sich die extrapolierten Werte dem Mittelwert an.

Polynom-Approximation

Da 3 Punkte vorhanden sind, lassen sich nur Polynome mit max. Grad 2 eindeutig bestimmen:

1. Grades: $\hat{f} = a_1 x + a_0$
2. Grades: $\hat{f} = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

➢ Lösen des LGS: $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$



Hinweis: Extrapolation erfolgt hier exakt gleich wie Interpolation.

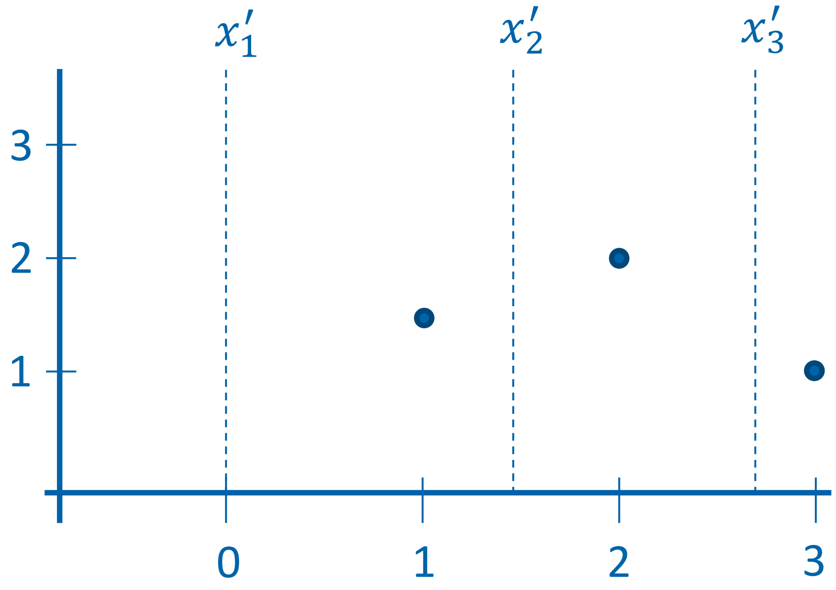
Polynom-Approximation – 1.Grades

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1^t \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}_1^t \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Oder 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$14a_1 + 6a_0 = 8.5$$
$$6a_1 + 3a_0 = 4.5$$

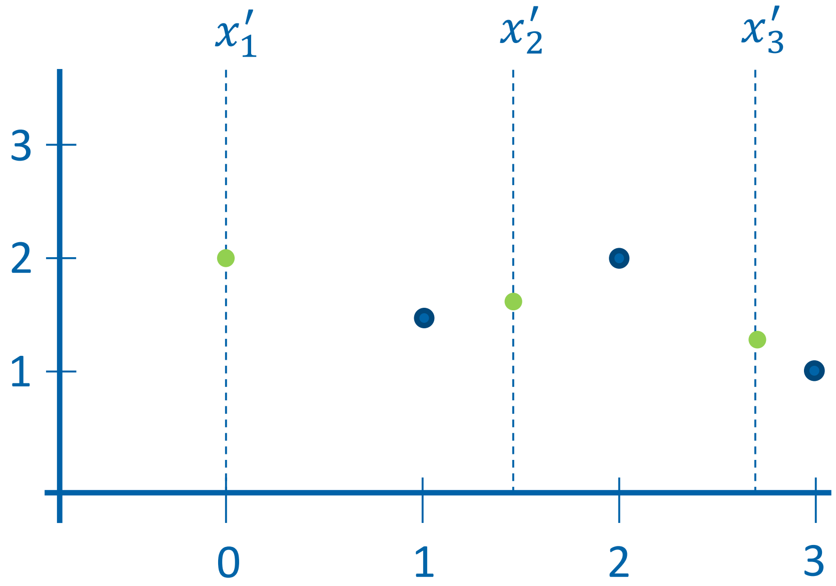
https://de.wikipedia.org/wiki/Matrizenmultiplikation

https://de.wikipedia.org/wiki/Inverse_Matrix

Polynom-Approximation – 1.Grades

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_1 = -0.25x_1' + 2 = 2$$
$$\hat{f}_2 = -0.25x_2' + 2 = 1.6250$$
$$\hat{f}_3 = -0.25x_3' + 2 = 1.3125$$



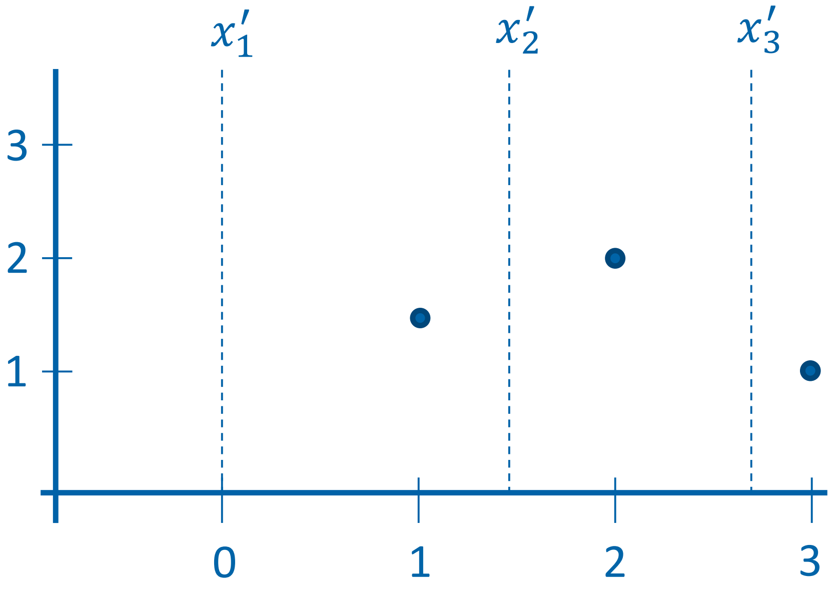
Polynom-Approximation – 2.Grades

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A_2}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 2.75 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Oder 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

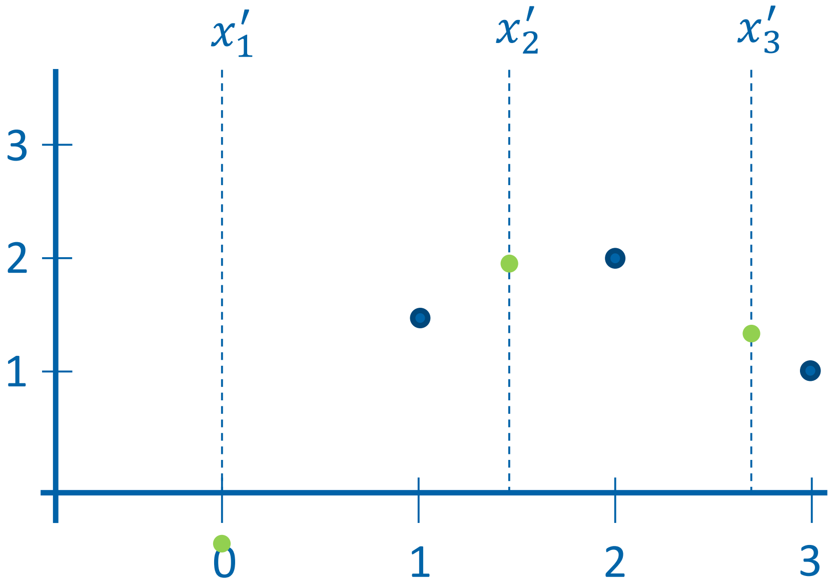
$$a_2 + a_1 + a_0 = 1.5$$
$$4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2$$
$$9a_2 + 3a_1 + a_0 = 1$$



Polynom-Approximation – 2.Grades

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 2.75 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{f_1} = -0.75{x_1'}^2 + 2.75x_1' - 0.5 = -0.5$$
$$\widehat{f_2} = -0.75{x_2'}^2 + 2.75x_2' - 0.5 = 1.9375$$
$$\widehat{f_3} = -0.75{x_3'}^2 + 2.75x_3' - 0.5 = 1.3906$$



Institut für Geophysik und Geoinformatik
Dr. Peter Menzel
Gustav-Zeuner-Str. 12
09599 Freiberg
Tel. +49(0)3731 39-3815