



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
BERGAKADEMIE FREIBERG

Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

# Grundlagen GIS

Sommersemester 2024

Prof. Christian Gerhards  
Arbeitsgruppe Geomathematik und Geoinformatik

OPAL:

<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873?6>

Institut für Geophysik und Geoinformatik - TU Bergakademie Freiberg

# Morphologische Operationen

Morphologische Operationen sind auf den ersten Blick mit Filtern verwandt, aber eher mengentheoretisch orientiert. Sie dienen u.a. dazu geometrische Informationen in Bildern zu analysieren und transformieren. Sie können mit der Anwendung von Filtern kombiniert werden.

Die Grundoperationen sind **Erosion** und **Dilatation**. Wir betrachten Sie hier nur für binäre Bilder (mit Bild meinen wir hier eine Funktion  $f : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \rightarrow \{0, 1\}$ ).

# Morphologische Operationen

Morphologische Operationen sind auf den ersten Blick mit Filtern verwandt, aber eher mengentheoretisch orientiert. Sie dienen u.a. dazu geometrische Informationen in Bildern zu analysieren und transformieren. Sie können mit der Anwendung von Filtern kombiniert werden.

Die Grundoperationen sind **Erosion** und **Dilatation**. Wir betrachten Sie hier nur für binäre Bilder (mit Bild meinen wir hier eine Funktion  $f : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \rightarrow \{0, 1\}$ ).

Die Translation einer Menge  $X \subset \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$  ist definiert durch

$$X_q = \{p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} : p - q \in X\}$$

Ein translatiertes Bild ist demnach gegeben durch  $f_q(p) = f(p - q)$ .  
Als Punktinversion bezeichnen wir

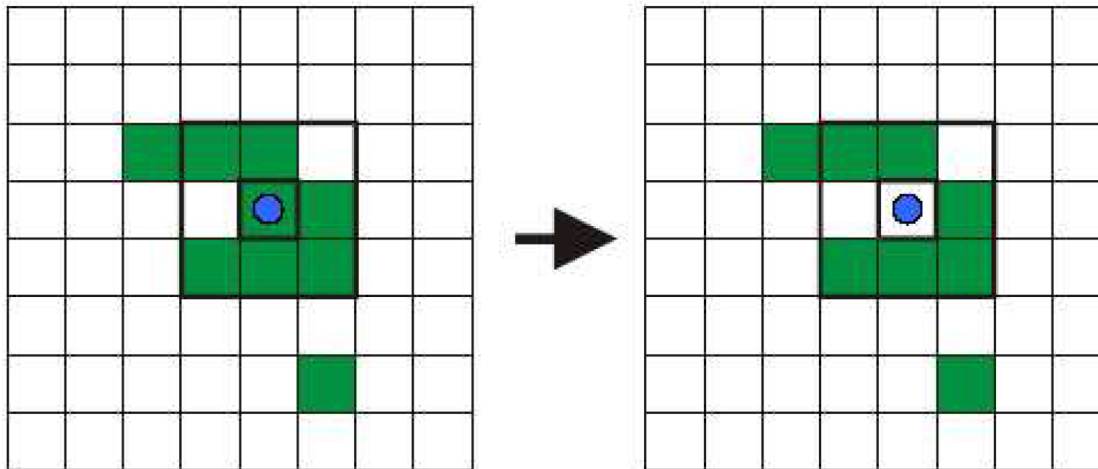
$$\check{X} = \{-p : p \in X\}$$

# Morphologische Operationen

Die **Erosion** einer Menge  $X$  mit einem Strukturelement  $B$  ist nun definiert als

$$\varepsilon_B(X) = \{p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} : B_p \subset X\} = \bigcap_{p \in B} X_{-p}.$$

In Worten: Erosion beschreibt alle Pixel  $p$ , für die das Strukturelement  $B$  mit Zentrum  $p$  in  $X$  liegt.

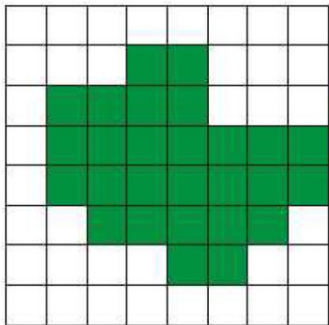


# Morphologische Operationen

Die **Erosion** einer Menge  $X$  mit einem Strukturelement  $B$  ist nun definiert als

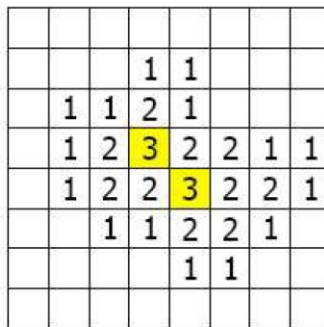
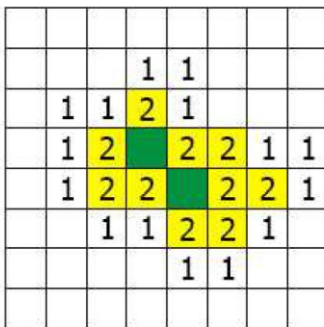
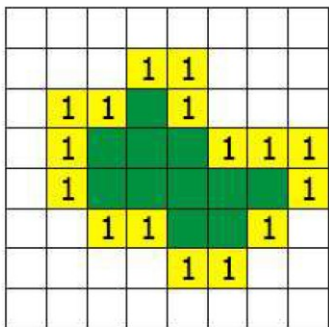
$$\varepsilon_B(X) = \{p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} : B_p \subset X\} = \bigcap_{p \in B} X_{-p}.$$

In Worten: Erosion beschreibt alle Pixel  $p$ , für die das Strukturelement  $B$  mit Zentrum  $p$  in  $X$  liegt.

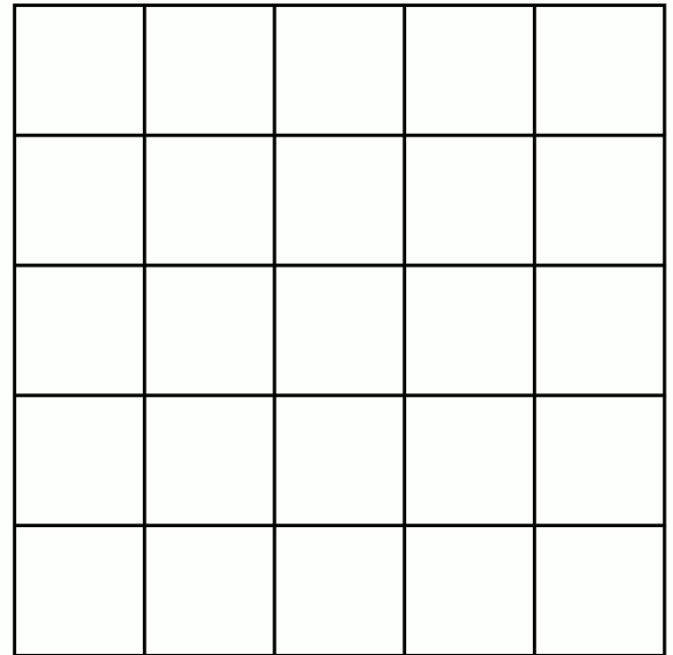
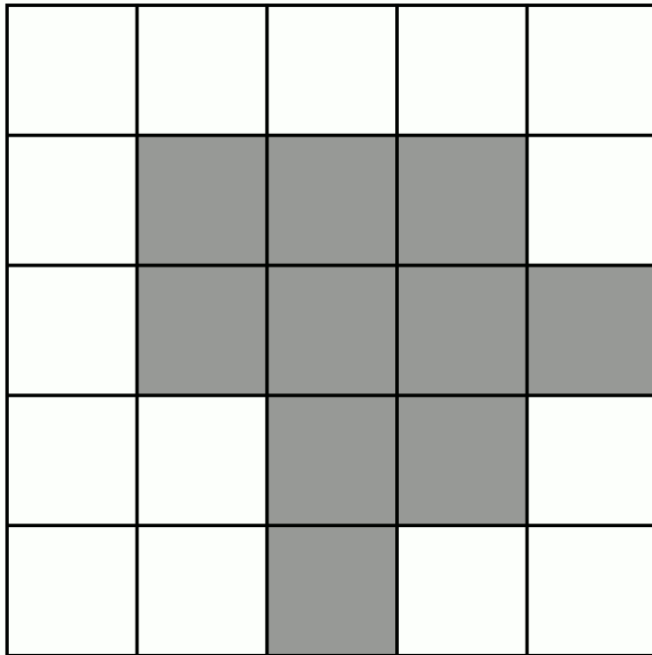
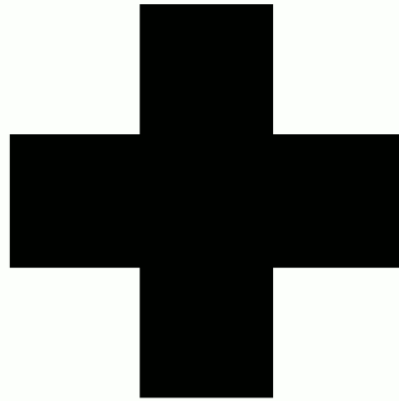


Originalbild

- Objektinneres (nach fortgesetzter Erosion)
- Randpixel nach der n-ten Erosion einschließlich Distanz



Welches Strukturelement wurde hier gewählt?



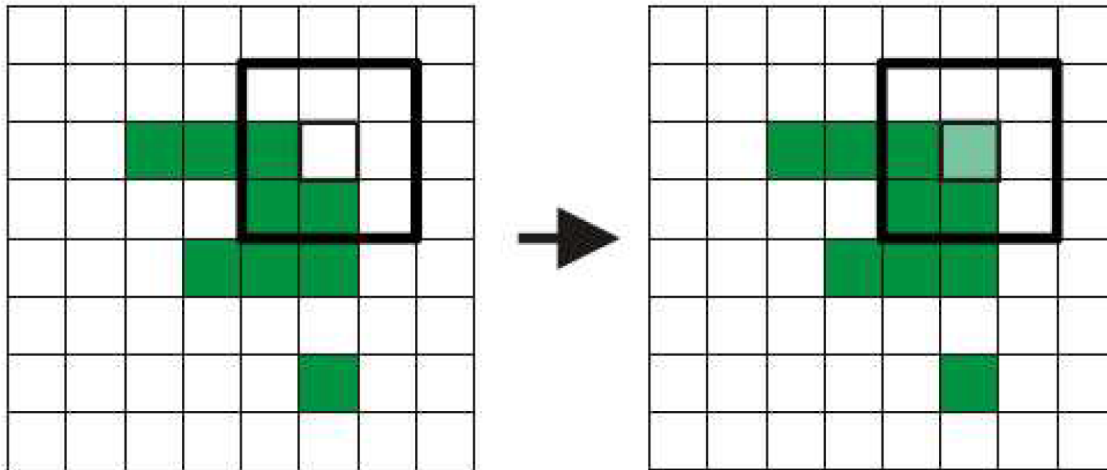
[Animation siehe OPAL!](https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975) (https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975 )

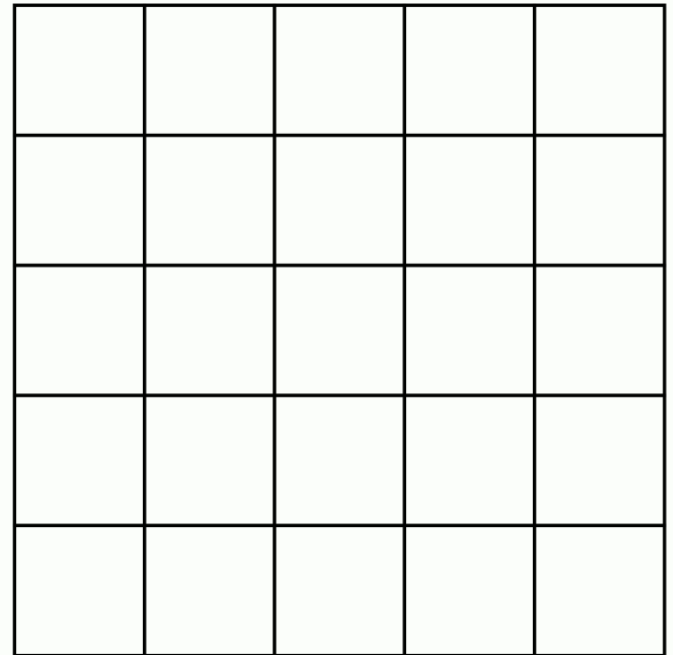
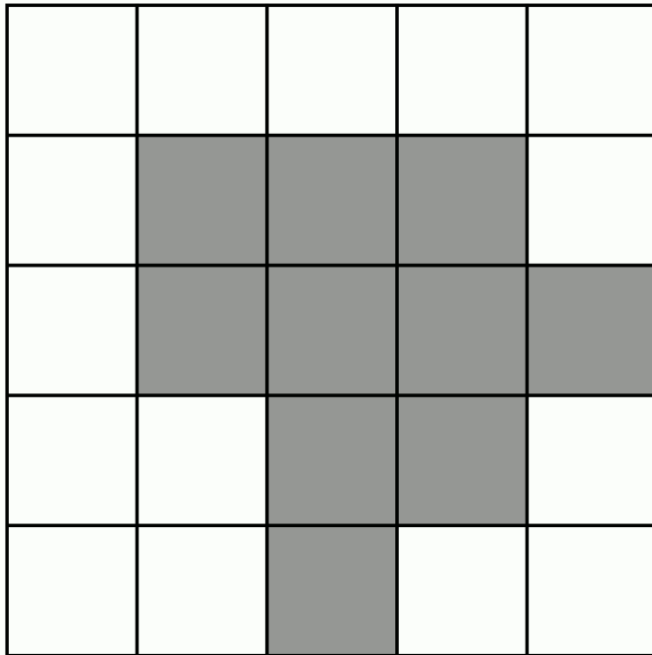
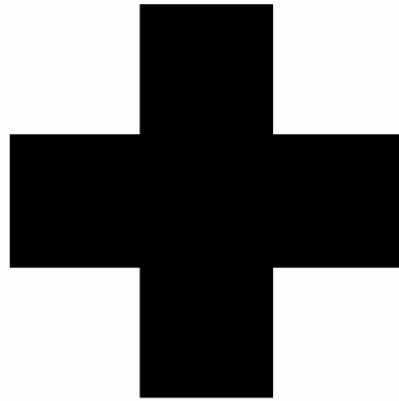
# Morphologische Operationen

Die **Dilatation** einer Menge  $X$  mit einem Strukturelement  $B$  ist nun definiert als

$$\delta_B(X) = \{p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} : B_p \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{p \in B} X_{-p}.$$

In Worten: Dilatation beschreibt alle Pixel  $p$ , für die das Strukturelement  $B$  mit Zentrum  $p$  mindestens ein Element der Menge  $X$  enthält.





[Animation siehe OPAL!](https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975) (https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975 )

# Morphologische Operationen

Die **Öffnung** einer Menge  $X$  mit einem Strukturelement  $B$  ist definiert als

$$\gamma_B(X) = \{B_p : p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}, B_p \subset X\} = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)).$$

In Worten: Öffnung beschreibt die Vereinigung aller Strukturelemente  $B_p$ , die in  $X$  enthalten sind, nicht nur der Referenzpunkte  $p$  (letzteres ist Erosion).

# Morphologische Operationen

Die **Öffnung** einer Menge  $X$  mit einem Strukturelement  $B$  ist definiert als

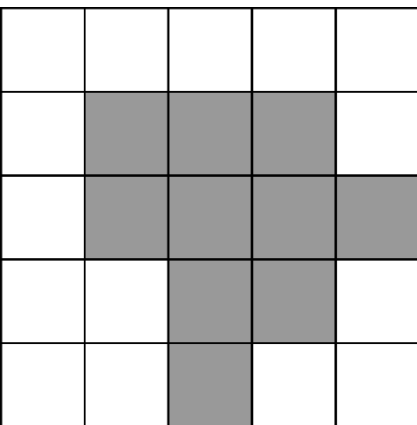
$$\gamma_B(X) = \{B_p : p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}, B_p \subset X\} = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)).$$

In Worten: Öffnung beschreibt die Vereinigung aller Strukturelemente  $B_p$ , die in  $X$  enthalten sind, nicht nur der Referenzpunkte  $p$  (letzteres ist Erosion).

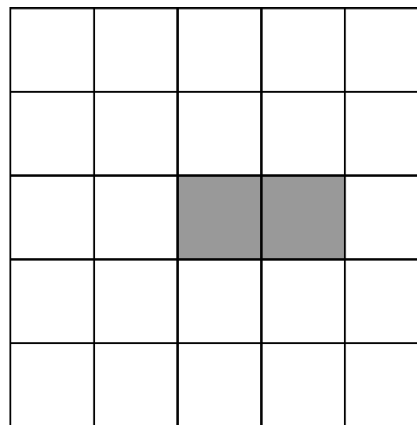
Die **Schließung** einer Menge  $X$  mit einem Strukturelement  $B$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \phi_B(X) &= (\{B_p : p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}, B_p \subset X^c\})^c \\ &= \bigcap_{p \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}} \{B_p^c : X \in B_p^c\} = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)). \end{aligned}$$

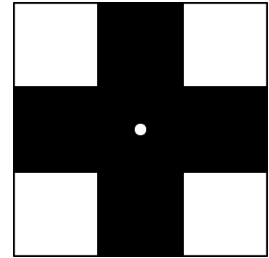
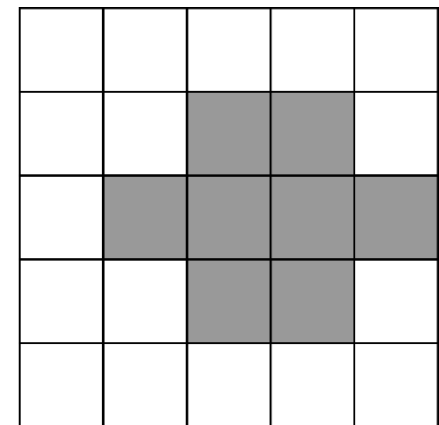
## Öffnung / opening



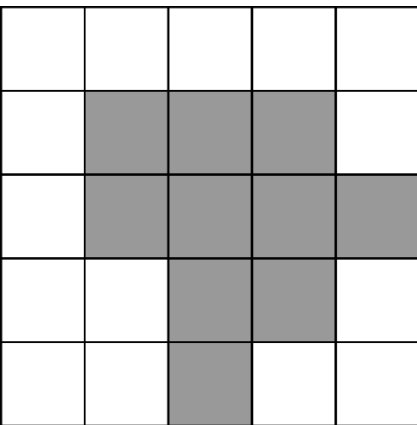
Erosion



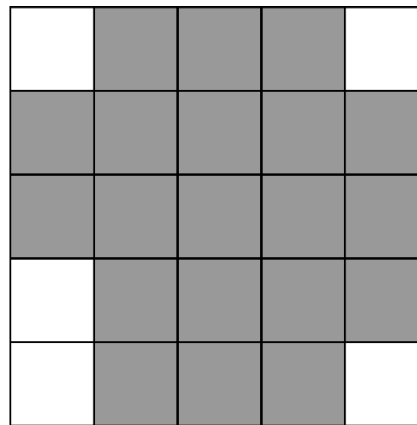
Dilation



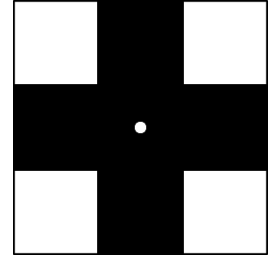
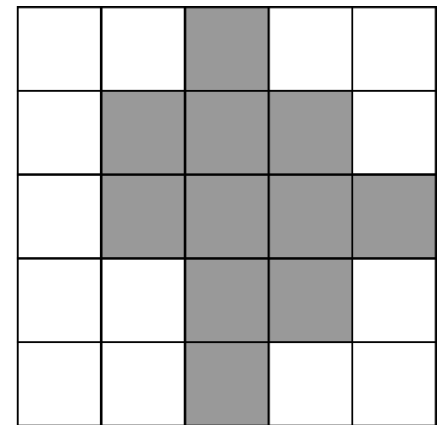
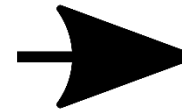
## Schließung / Abschluss / closure



Dilation



Erosion



# Morphologische Operationen

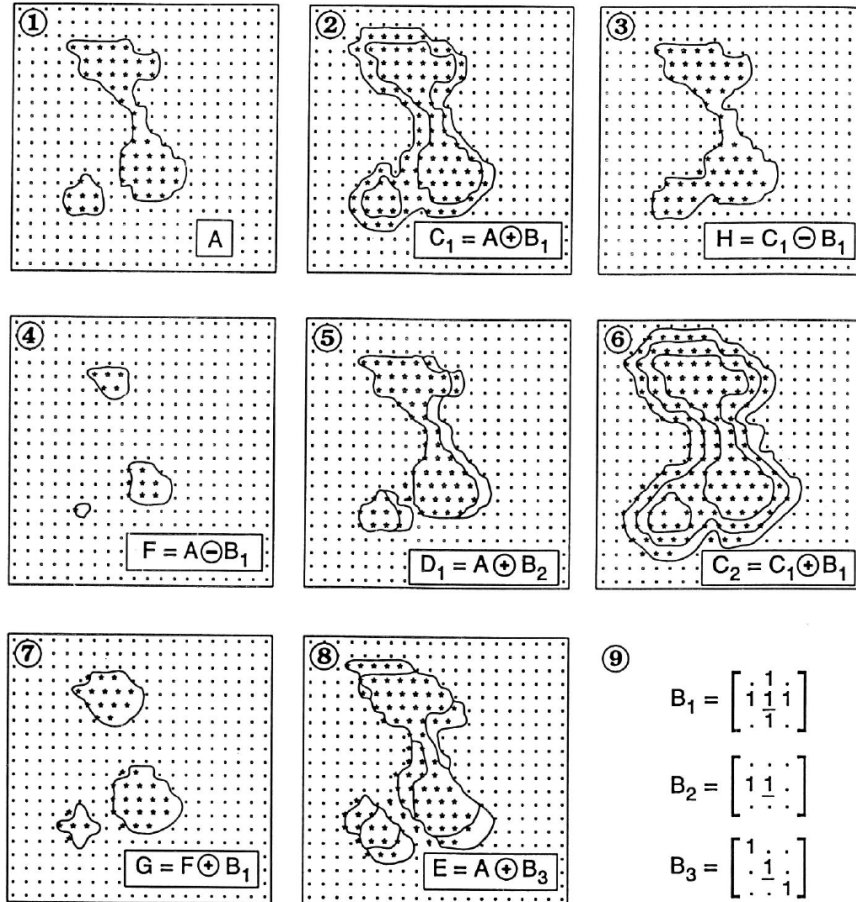


FIG. 6-9. Mathematical morphology operations on a small raster image. (1). Original image A. (2). Dilation of A using structuring element  $B_1$ . (3). Closing of image A by  $B_1$ . (4). Erosion of A by  $B_1$ . (5). Dilation of A by structuring element  $B_2$ . (6). Two successive dilations of A by  $B_1$ . (7). Opening of A by  $B_1$ . (8). Dilation of A by  $B_3$ . (9). Three (3\*3) structuring elements.

## Arithmetische Differenzen

$$\delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$$

$$\delta_B(f) - f$$

$$f - \varepsilon_B(f)$$

können genutzt werden, um Ränder in Bildern hervorzuheben (ähnlich wie Sobel- oder Prewittfilter).

## Arithmetische Differenzen

$$\delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$$

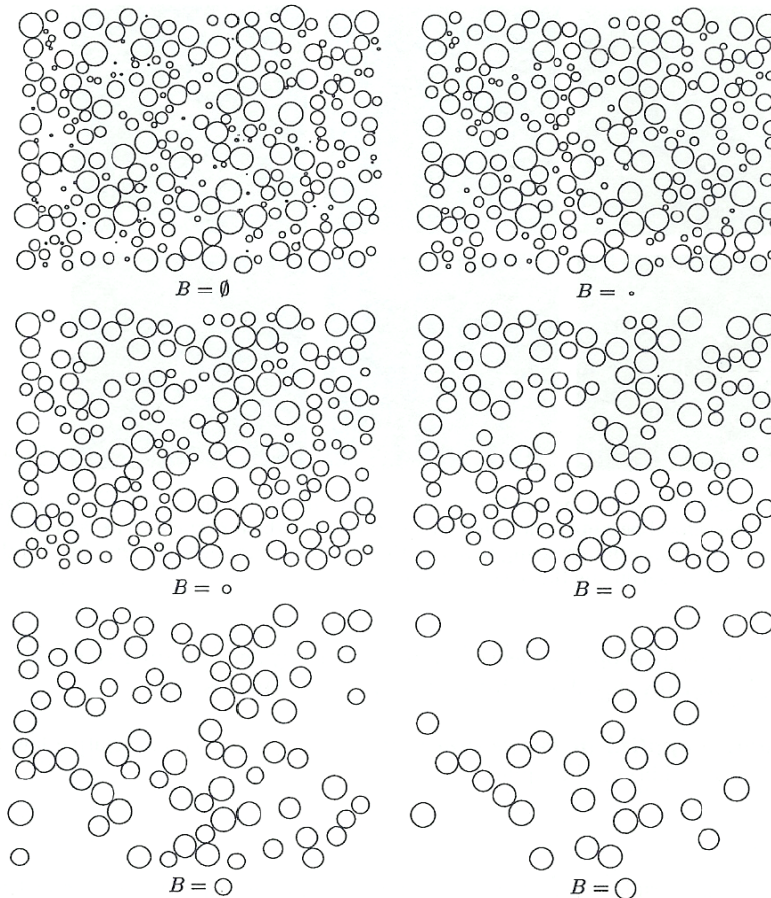
$$\delta_B(f) - f$$

$$f - \varepsilon_B(f)$$

können genutzt werden, um Ränder in Bildern hervorzuheben (ähnlich wie Sobel- oder Prewittfilter).

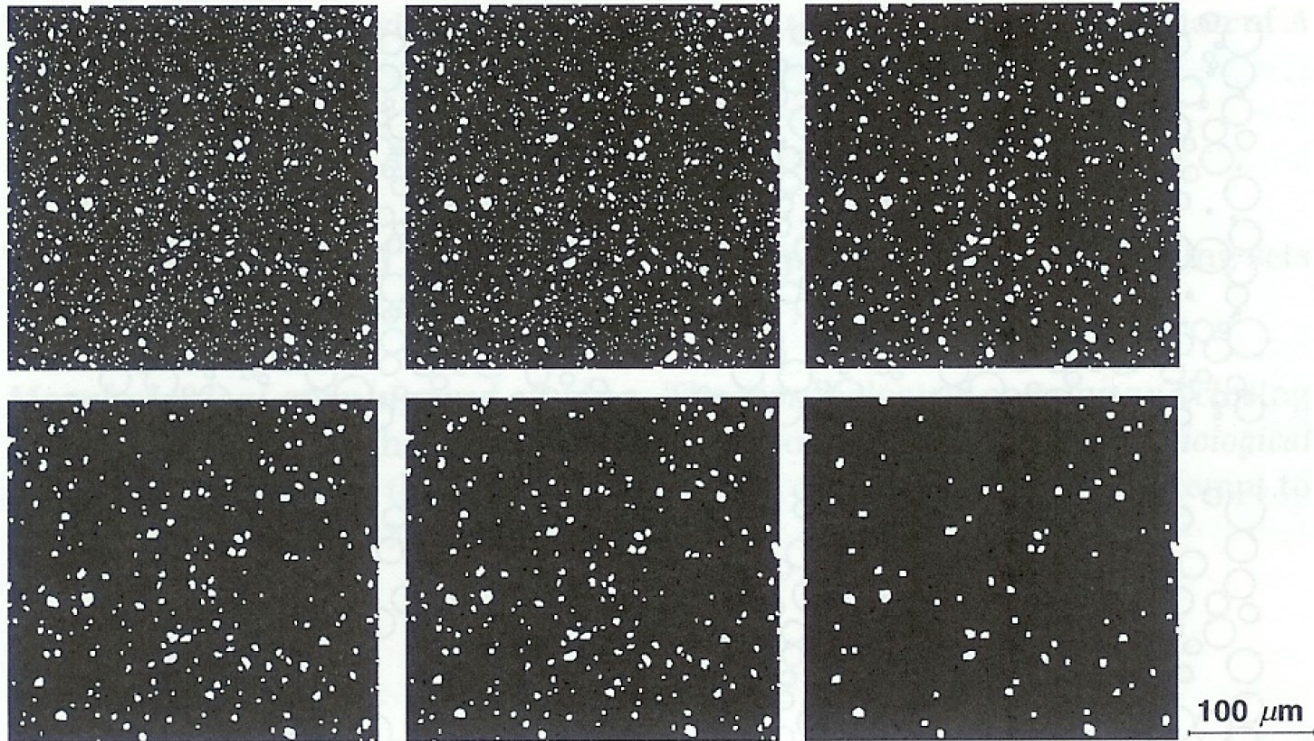
Öffnungen und Schliessungen können genutzt werden, um bestimmte geometrische Objekte in Bildern herauszufiltern oder zu erzwingen.

# Morphologische Operationen



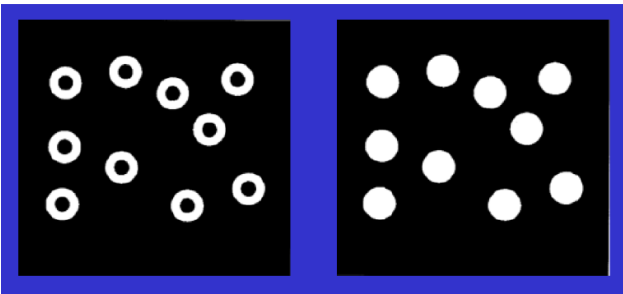
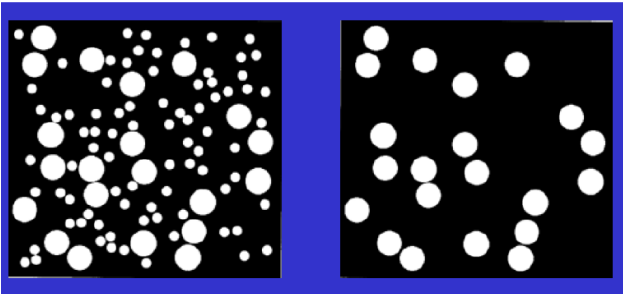
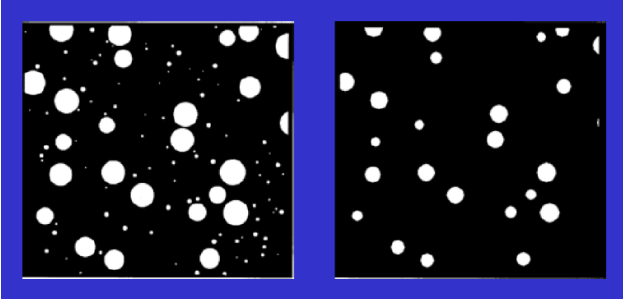
**Figure 2.3** 'Sieving' of disks of uniformly distributed diameter. The structuring element  $B$  is a disk of increasing diameter. If the diameter of the disk is smaller than the diameter of the current structuring element, this disk is eliminated from the image. For  $B = \emptyset$  we have the original image.

# Morphologische Operationen



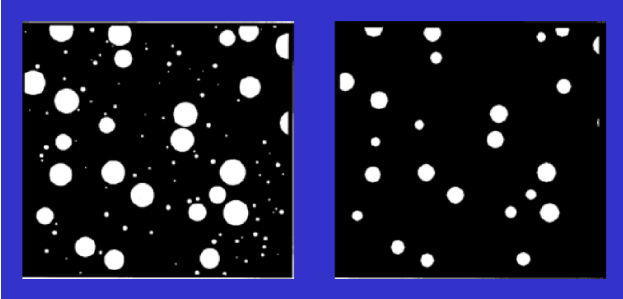
**Figure 2.4** The use of morphological opening for the classification of the particle sizes of a spheroidized pearlite containing small granular carbide particles. The structuring element is a square of increasing edge length. This example shows that the shape of the objects is changed during the opening process.

# Morphologische Operationen

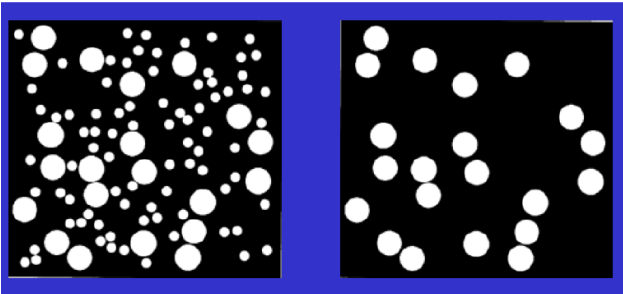


Welche Operationen wurden durchgeführt?

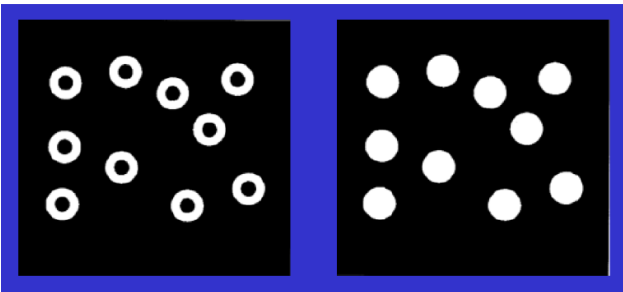
# Morphologische Operationen



Erosion

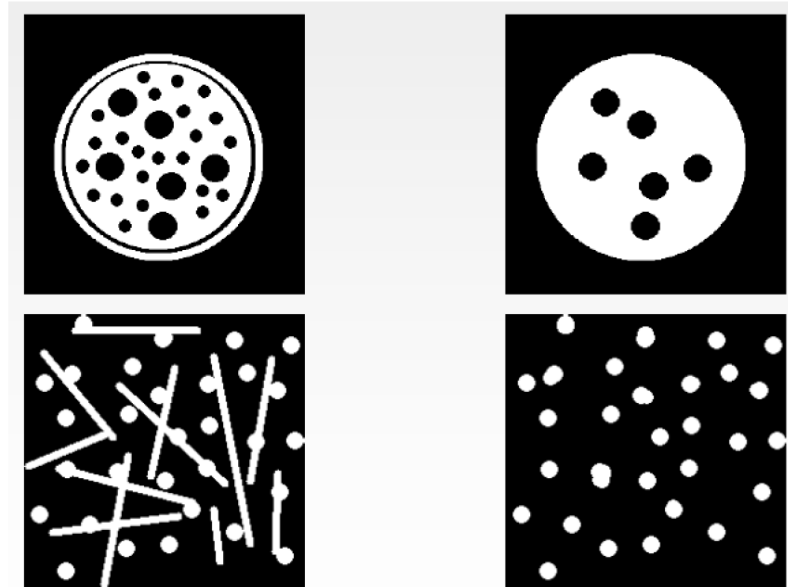


Öffnung



Schliessung

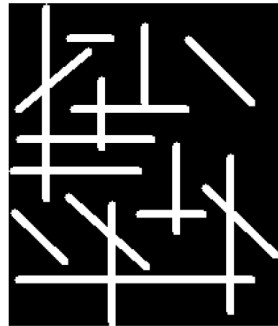
# Morphologische Operationen



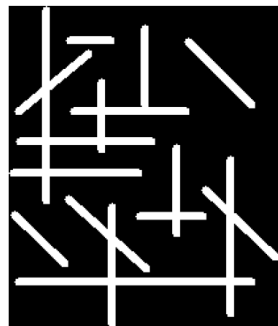
top: Closing with a disc shaped structuring element

bottom: Opening with a disc shaped structuring element

# Morphologische Operationen



Opening with a  $9 \times 3$  vertically oriented structuring element.

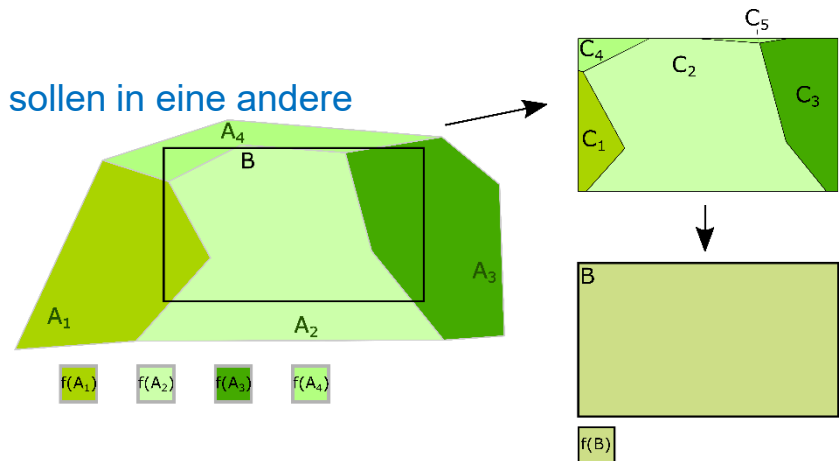


Opening with a  $3 \times 9$  horizontally oriented structuring element.

# Sampling Transformationen

## Probleme

- Gegeben seien mehrere verschiedene Geoobjekte. Wie lassen sich dieses anhand ihres relativen Abstands klassifizieren?
  - Buffering
  
- Gegeben sind ein oder mehrere Geoobjekte mit Attributen. Diese Attributwerte sollten jetzt für einen beliebigen Punkt oder eine Region abgefragt/ermittelt werden ...
  - Punkt → Punkt: **Interpolation!**
  - Linie → Punkt: **Interpolation!**
  - Fläche → Punkt ...
  - Fläche → Fläche ...
  
- Geoobjekte in einer gegebenen Auflösung sollen in eine andere Auflösung überführt werden (*Resampling*)



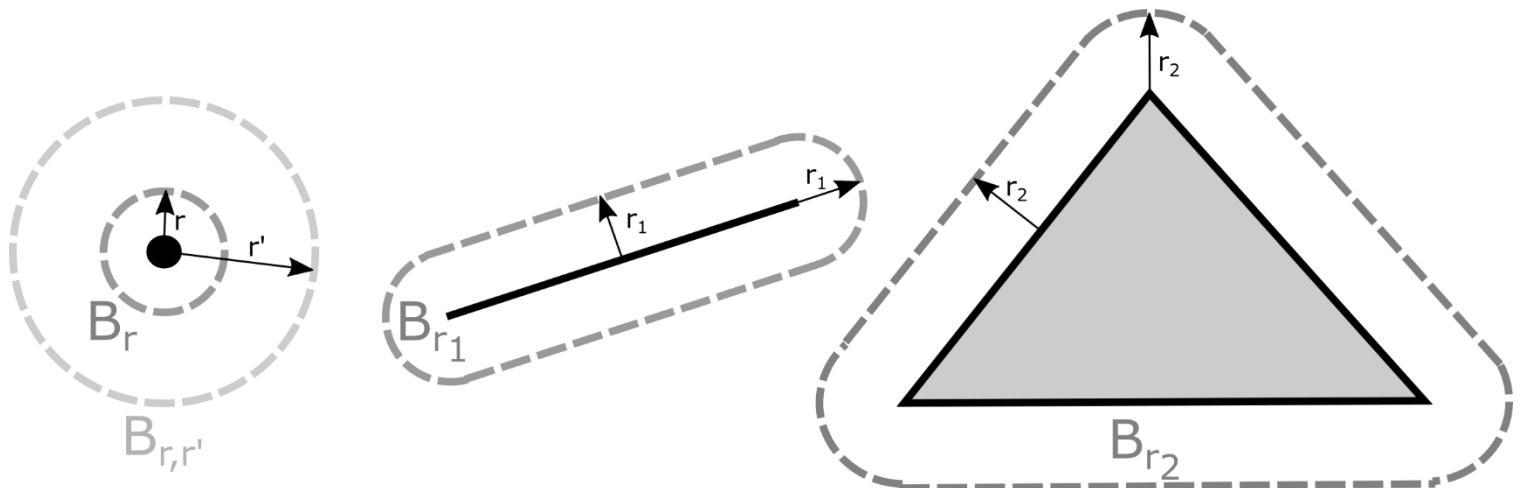
## Problem

Gegeben sind mehrere Geoobjekte. Wie lassen sich diese anhand ihres relativen Abstands klassifizieren?

- Geoobjekt  $O$  wird virtuell um einen Betrag  $r$  flächig erweitert. Dadurch entsteht eine s.g. *Pufferzone* (Zone relativer Nähe, *proximity zone*, *buffer zone*)  $B_r(O)$ . Es gilt:

$$x \in B_r(O) \rightarrow d(x, O) \leq r$$

- Pufferkorridor  $B_{r,r'}(O)$ :  $x \in B_{r,r'}(O) \rightarrow r \leq d(x, O) \leq r'$



## Problem

Gegeben sind mehrere Geoobjekte. Wie lassen sich diese anhand ihres relativen Abstands klassifizieren?

- Räumliche Klassifikation nur basierend auf senkrechtem Abstand  $d(x, 0)$
- Pufferzonen liegen nicht als eigene Objekte vor, werden aber ggf. visualisiert
- Erleichtert visuelle Interpretation durch sichtbare Abstandsgruppen

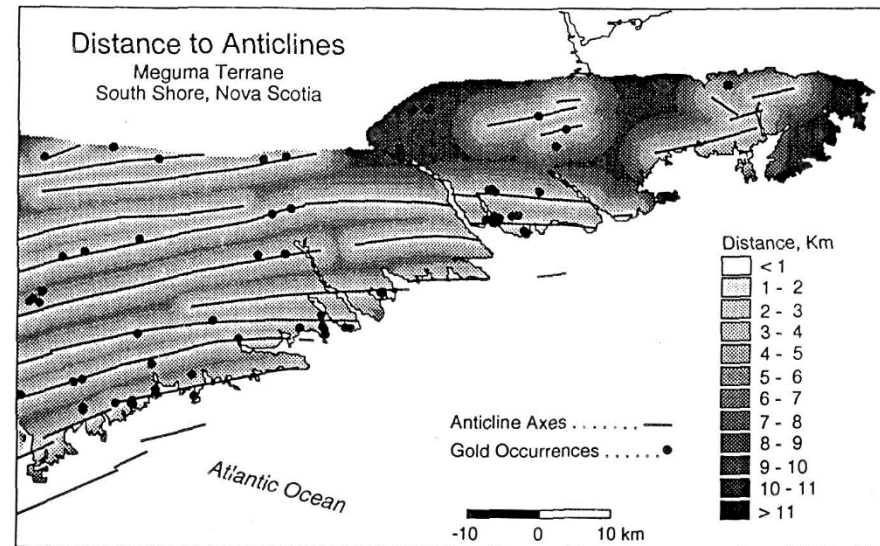


FIG. 6-8. A. Map to illustrate the dilation or buffering of linear features. Anticlinal fold axes in Meguma terrane, Nova Scotia have been successively dilated with corridors (250 m intervals) to produce a map showing proximity to the nearest fold axis. A classification has been applied so that the intervals on the map are 1 km. The points are locations of gold occurrences.

## Problem

Gegeben sind ein oder mehrere Flächenobjekte mit Attributen. Diese sollten jetzt an gegebenen Punktpositionen ausgewertet werden.

- Geometrisches Problem: **Punkt-in-Polygon-Test**  
**Befindet sich ein Punkt innerhalb eines Polygons?**
- Verschiedene Verfahren basierend auf verschiedenen Arten von Polygonen
  - Achs-paralleles Rechteck
  - Dreieck
  - Beliebiges Polygon

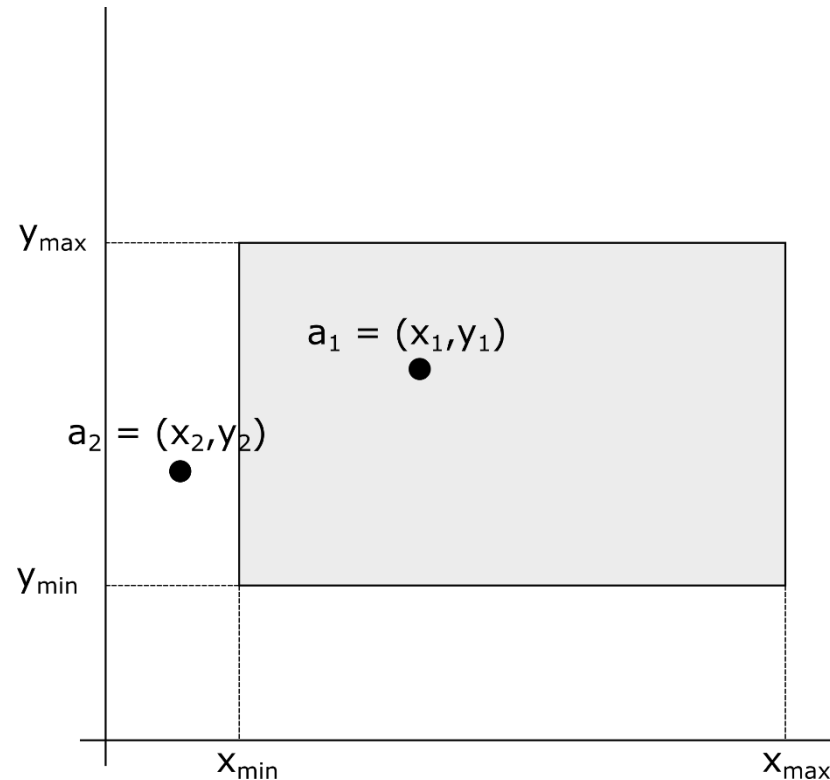
## Bounding-Box-Test

- Gegeben:  
Rechteck  $R = (x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max})$   
Abfragepunkt  $(x, y)$

- Bedingung:

$$x \in R \rightarrow \begin{cases} x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ y_{min} \leq y \leq y_{max} \end{cases}$$

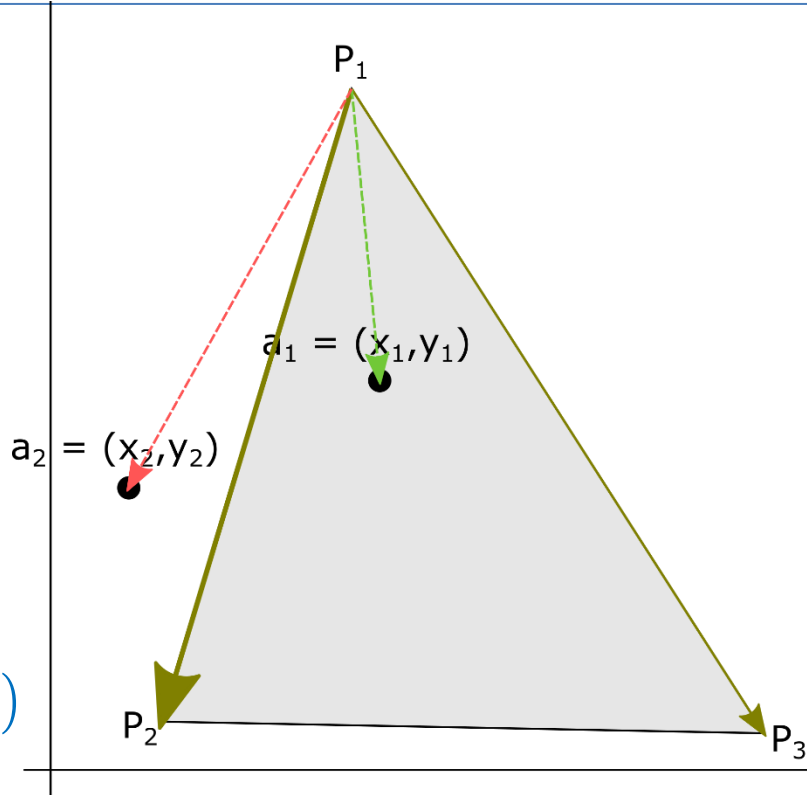
- Vorteil:
  - sehr effizient
  - leicht erweiterbar  
in höhere Dimensionen
- Nachteil: begrenzt anwendbar
- Anwendung:  
Identifizierung, ob ein Punkt in der AABB\* eines Objektes liegt. Wenn ja, lohnen sich aufwändigere Verfahren für genauere Abfragen.



\*axis-aligned bounding box

## Punkt-in-Dreieck-Test

- Gegeben:  
Dreieck  $\Delta(\vec{p}_i, \vec{p}_j, \vec{p}_k)$   
Abfragepunkt  $\vec{x} = (x, y)$
  - Ansatz:
    - jede Dreiecksseite teilt den Raum in 2 Halbräume
    - liegt  $\vec{x}$  im gleichen Halbraum wie der der Kante  $(\vec{p}_i, \vec{p}_j)$  gegenüberliegende Punkt  $\vec{p}_k$  liegt  $\vec{x}$  potentiell im Dreieck  $\Delta$ 
      - $w_{ij}(\vec{x}) > 0$  mit
- $$w_{ij}(\vec{x}) = ((\vec{p}_j - \vec{p}_i) \times (\vec{p}_k - \vec{p}_i)) \cdot ((\vec{p}_j - \vec{p}_i) \times (\vec{x} - \vec{p}_i))$$
- $\vec{x} \in \Delta \rightarrow w_{ij}(\vec{x}) > 0, w_{jk}(\vec{x}) > 0, w_{ki}(\vec{x}) > 0$
- Test kann abgebrochen werden, wenn **ein**  $w < 0$  gefunden wird
  - Vorteil: Berechnung leicht optimierbar
  - Nachteil: nur für Dreiecke geeignet



## Punkt-in-Polygon-Test / Strahlmethode nach Jordan

- Gegeben:  
 Polygon  $P(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$  mit Sequenz aus  $n$  Randpunkten  
 $\Rightarrow$  Kante  $k_i = \vec{p}_{i+1} - \vec{p}_i, 1 \leq i \leq n - 1; k_n = \vec{p}_1 - \vec{p}_n$   
  
 Abfragepunkt  $\vec{x} = (x, y)$
- Ansatz:
  1. Definiere einen Strahl mit beliebiger Richtung  $\vec{r}$ , ausgehend von  $\vec{x}$
  2. Teste für jede Kante, ob der Strahl die Kante schneidet  

$$\forall k_i: \vec{x} + \lambda_r \vec{r} = \vec{p}_i + \lambda_i (\vec{p}_{i+1} - \vec{p}_i)$$
    - Schnitt wenn  $\lambda_i \geq 0$  und  $\lambda_i < 1$
  3. Zähle alle Schnitte zwischen Strahl und Kanten:  $n_h$
- $n_h$  ist **ungerade**:  $\vec{x} \in P$
- $n_h$  ist **0 oder gerade**:  $\vec{x} \notin P$

## Punkt-in-Polygon-Test / Strahlmethode nach Jordan

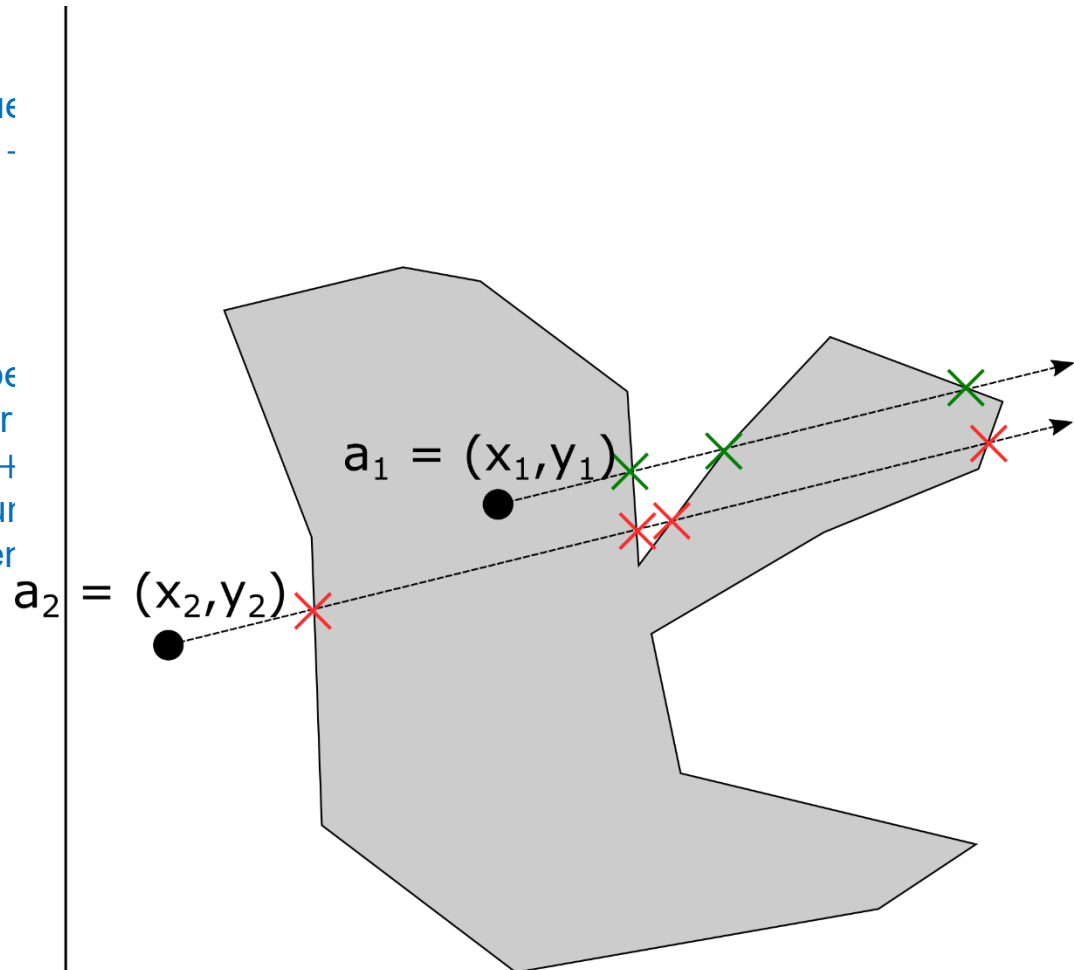
- Gegeben:  
 Polygon  $P(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$  mit Sequenz  
 $\Rightarrow$  Kante  $k_i = \vec{p}_{i+1} - \vec{p}_i, 1 \leq i \leq n - 1$

Abfragepunkt  $\vec{x} = (x, y)$

- Ansatz:
  1. Definiere einen Strahl mit beliebigem Richtungsvektor  $\vec{r}$
  2. Teste für jede Kante, ob der Strahl die Kante schneidet  
 $\forall k_i: \vec{x} + \lambda_r \vec{r} = \vec{p}_i + \lambda_i k_i$   
 $\Rightarrow$  Schnitt wenn  $\lambda_i \geq 0$  und  $\lambda_r < 0$
  3. Zähle alle Schnitte zwischen Strahl und Polygon

- $n_h$  ist **ungerade**:  $\vec{x} \in P$
- $n_h$  ist **0 oder gerade**:  $\vec{x} \notin P$

- Vorteil: funktioniert für **alle** Polygone
- Nachteil: aufwändig, es müssen immer **alle** Kanten getestet werden



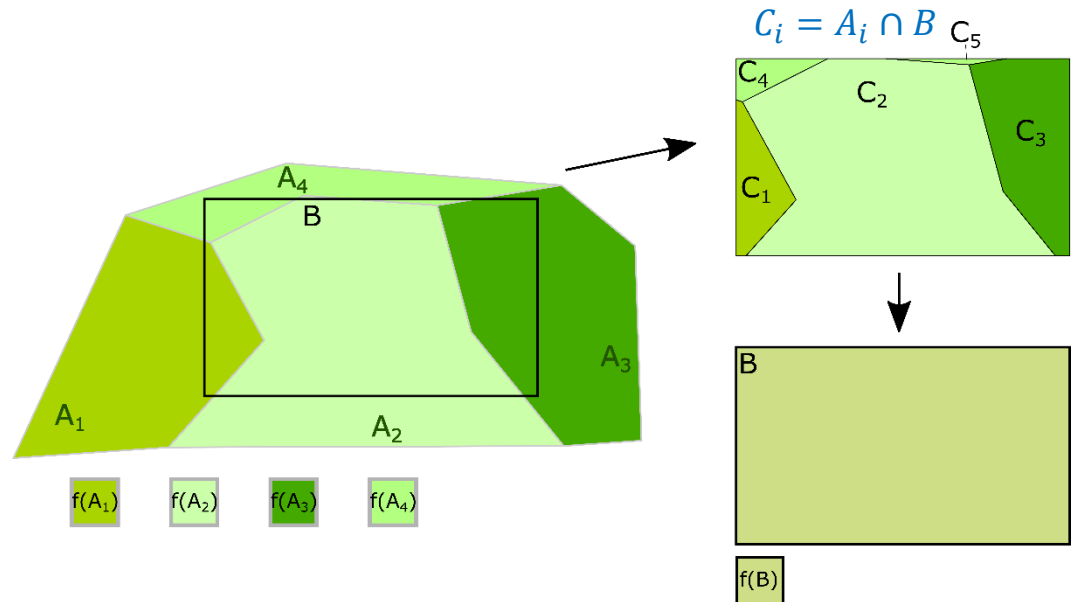
# Fläche-zu-Fläche Transformation

## Problem


Gegeben sind ein oder mehrere Flächenobjekte mit Attributen. Diese sollten jetzt für ein gegebenes anderes Flächenobjekt ausgewertet werden.

- Gegeben: Menge von Polygonen  $(A_i, f(A_i))$  und ein Abfragepolygon  $B$
- Gesucht:  $f(B) = \sum_i \lambda_i f(A_i)$

$$\lambda_i = \frac{\text{Fläche}(A_i \cap B)}{\text{Fläche}(B)}$$



## *upsampling*

- Erhöhung der Auflösung
  - Hinzufügen von zusätzlichen unabhängigen Daten 
  - Interpolation ...? → keine zusätzliche Information

## *downsampling*

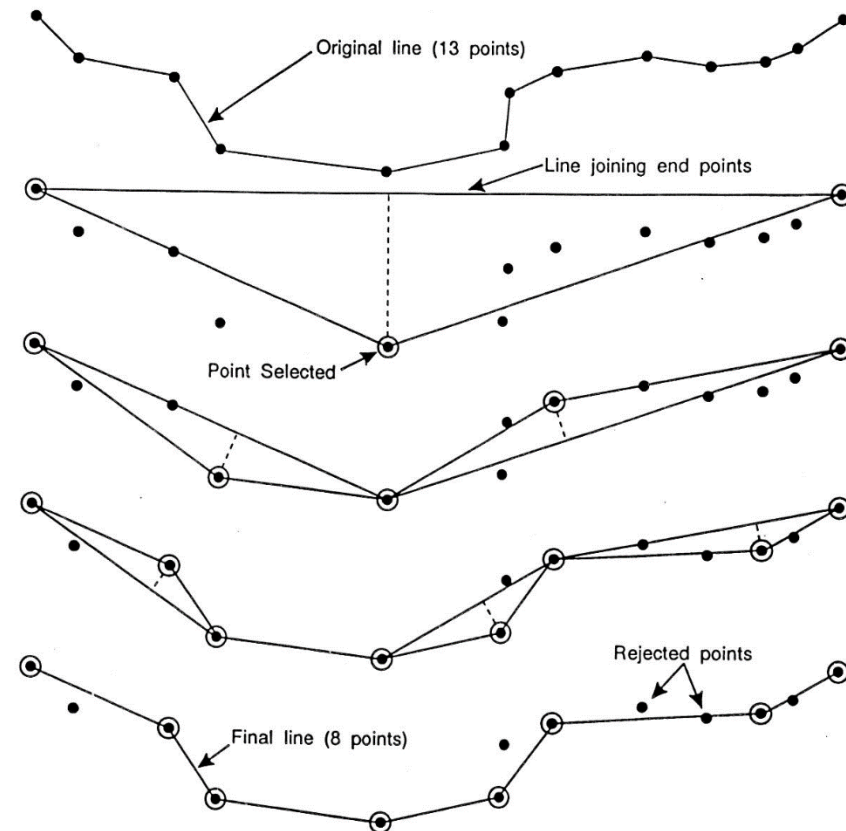
- Verringerung der Auflösung
  - Interpolation ...? → Gefahr von Informationsverlust
  - **weeding**

## *weeding*

- Entfernen von Datenpunkten mit dem geringsten Beitrag zum Informationsgehalt
- basierend auf Geometrie und/oder Parameterverteilung
- Ziel: verbleibende Datenpunkte umfassen die relevante Information
- Beispiel: **Douglas-Peucker-Algorithmus zur Ausdünnung von Liniendaten**

## Douglas-Peucker-Algorithmus zur Ausdünnung von Liniendaten

1. Verbinde Anfangs- und Endpunkt mit einer geraden Linie
  2. Füge den Datenpunkt ein, der den größten senkrechten Abstand zur Verbindungslinie
    - Zwei neue Segmente
  3. Wiederhole Punkt 2 für jedes neue Segment bis kein Datenpunkt ist weiter entfernt als gegebenes Minimum
- Datenpunkte, welche nicht eingefügt werden, tragen zu wenig Information zur Liniengeometrie bei



**FIG. 6-10.** Douglas-Peucker algorithm for line generalization. The original line contains 13 points, and the final line contains 8 points. The rejected points are said to be "weeded". A number of alternative algorithms for line weeding have been proposed.