LAG N1.1 Hausaufgabe

Josua Kowalzik

October 16, 2021

1 Aufgabe a)

1.1 Aufgabenstellung a)

Bestimmen Sie $z := (1+i)^6$ in Eulerscher Darstellung auf 2 Arten:

- Berechnen Sie zuerst z in arithmetischer Darstellung und rechnen Sie dann in Polarkoordinaten um.
- Bestimmen Sie zuerst die Eulersche Darstellung von $(1+i)$ und berechnen Sie dann die 6. Potenz.

1.2 Lösung a)

1.2.1 über arithmetische Darstellung:

z zuerst in arithmetischer Darstellung:

$$z = (1+i)^6 = (1+2i-1)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i = 0 - 8i$$

Umrechnung in Polarkoordinaten:

Da $Re(z) = 0$ und $Im(z) = -8$ liegt z in der GAUSSschen Zahlenebene auf dem negativen Teil der imaginären Achse. Es folgt:

$$r = |Im(z)| = |-8| = 8 \qquad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$
$$\Rightarrow z = 8e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

1.2.2 über Eulersche Darstellung:

$1+i$ in Eulerscher Darstellung:

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4}$$
$$cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} \vee \frac{7\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

Berechnung von z :

$$z = (1+i)^6 = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^6 = 8e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

2 Aufgabe b)

2.1 Aufgabenstellung b)

Berechnen Sie $y := \overline{(1+i)}^{-1}$

2.2 Lösung b)

$$y = \overline{(1+i)}^{-1} = (1-i)^{-1} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2}$$

3 Aufgabe c)

3.1 Aufgabenstellung c)

Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen x die Gleichung $\overline{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$ gilt.

3.2 Lösung c)

Proof. $x := a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\overline{x}^{-1} = \overline{(a+bi)}^{-1} = (a-bi)^{-1} = \frac{1}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a+bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i =$$

$$= \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i} = \overline{\frac{a-bi}{a^2+b^2}} = \overline{\frac{a-bi}{a^2-(bi)^2}} = \overline{\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}} = \overline{\frac{1}{a+bi}} = \overline{(a+bi)^{-1}} = \overline{x^{-1}}$$

$\square$