Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Marco Hamann, Michael Meinhold Dresden, 13. Oktober 2023

Mathematik für Ingenieure - WS2023/24
Übungsblatt 2

Aufgaben mit Lösungshilfe. Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1: Gegeben sind die Funktionen f_k ($k \in \mathbb{N}$) der reellen Variablen x,

$$f_k : x \mapsto f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Geben Sie die Glieder $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_{10}(x)$ und $s_{100}(x)$ der Funktionenreihe $(s_n(x))_{n=0}^{\infty}$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

an und skizzieren Sie deren Funktionsgraphen zusammen im Intervall $[-1, 1]$.

(b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion (Summe der Funktionenreihe) $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Potenzreihe mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Nutzen Sie dazu

(a) eine Taylorreihenentwicklung

(b) die Summenformel einer geometrischen Reihe

(c) die bekannte Reihe für $\ln(1 + x)$ (siehe Tafelwerk) und gliedweise Differentiation nach x

Geben Sie ferner den Konvergenzbereich der ermittelten Potenzreihe an.

Aufgabe 3: Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n.$$

Treffen Sie (wenn möglich) Aussagen über das Konvergenzverhalten an den Stellen $x = 3$, $x = 2$, $x = 6$ und $x = -10$ in den folgenden drei Fällen:

(a) der Konvergenzradius ist 3;

(b) die Potenzreihe konvergiert für $x = 4$ und divergiert für $x = 1$;

(c) die Abschätzung $0 \leq a_n \leq \frac{n}{5^n}$ gilt für alle n.

Hinweis: Für die Bearbeitung der letzten Teilaufgabe benutzen Sie günstigerweise den Ansatz

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$$

für die Abschätzung des Konvergenzradius r.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k!(x+2)^k}{4^k}\right) \tag{1}$$

(a) Stellen Sie die Potenzreihe in Formel (1) dar in der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$$

und geben Sie die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ sowie die Entwicklungsstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe in Formel (1) und untersuchen Sie diese Reihe - falls erforderlich - auf Konvergenz in den Randpunkten.

(c) Geben Sie den Konvergenzbereich an.

Selbständige Bearbeitung. Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 5: Gegeben sind die unendlichen Potenzreihen $(s_n(x))$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k \cdot \frac{x^k}{k}\right) \tag{2}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \tag{3}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{2^k} \tag{4}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{k!}\, x^k\right) \tag{5}$$

(a) Geben Sie für $x = 1$ $(x = -1)$ jeweils die zugehörige unendliche Zahlenreihe an und untersuchen Sie diese auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie für die Potenzreihen den Konvergenzradius und Konvergenzbereich. Untersuchen Sie ebf. auf Konvergenz in den Randpunkten.

Aufgabe 6: Geben Sie jeweils, sofern möglich, eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften an!

(a) (a_n) sei nach oben beschränkt.

(b) (b_n) sei beschränkt und streng monoton steigend.

(c) (c_n) sei beschränkt, aber nicht konvergent.

(d) (d_n) sei unbeschränkt, aber nicht monoton.

(e) (e_n) sei unbeschränkt und konvergent.

(f) (f_n) sei monoton, beschränkt, aber nicht konvergent.