TU Chemnitz – Professur Numerik partieller Differentialgleichungen 2. April 2025
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Sebastian Debus, Dr. Max Winkler

Mathematik IV (für IF, ET, Ph)

Sommersemester 2025

1. Übung: Differentialoperatoren

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\boldsymbol{v} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} v_1(\boldsymbol{x}) \\ v_2(\boldsymbol{x}) \\ v_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

gilt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{v})) = 0\,.$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{bmatrix} \\
\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{v})) &= \partial_1 (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) + \partial_2 (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) + \partial_3 (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \\
&= \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

da bei einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion die Reihenfolge der gemischten zweiten Ableitungen vertauschbar ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Rotation von $v(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 + x_2 + x_2\, x_3 \\ x_1 + x_1\, x_3 \\ x_1\, x_2 \end{bmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(v(\boldsymbol{x})) := \nabla \times v &= \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} && \Big| \text{ mit } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ 1 + x_3 - (1 + x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Weiterhin ist $v(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad}(x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3)$ und

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \operatorname{rot}\begin{bmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_1}\\ \frac{\partial U}{\partial x_2}\\ \frac{\partial U}{\partial x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_2}\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

für alle zweimal stetig diff.-baren Fkt. U

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Divergenz von

(a) $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_1x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2\,x_1^2 - x_2\,x_3 \\ x_2\,e^{x_3} \\ x_1\,e^{x_3} + x_2 \end{bmatrix}$, (c) $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ $\quad(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ bzw. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$.

Lösung: $\operatorname{div}(v(\boldsymbol{x})) = \nabla \cdot v = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}$

(a)

$$\operatorname{div}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_1x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix} = (1) + (2x_1) + (2) = 3 + 2x_1$$

(b)

$$\operatorname{div}\begin{bmatrix} 2\,x_1^2 - x_2\,x_3 \\ x_2\,e^{x_3} \\ x_1\,e^{x_3} + x_2 \end{bmatrix} = (2 \cdot 2x_1) + (e^{x_3}) + (x_1 e^{x_3}) = 4x_1 + (1 + x_1)e^{x_3}$$

(c) Beweisen zuerst die Produktregel für die Divergenz

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underbrace{(f\boldsymbol{v})}_{\boldsymbol{w}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{(f v_i)}_{w_i} = \sum_{i=1}^{n} (f_{,i} v_i + f v_{i,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_{,i} v_i) + f \sum_{j=1}^{n} v_{j,j} = (\operatorname{grad} f) \cdot v + f \operatorname{div} v\end{aligned}$$

Damit und mit

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \underbrace{\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}}_{f}\underbrace{\boldsymbol{x}}_{v}$$

folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} &= \left(\operatorname{grad}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\operatorname{div}\boldsymbol{x} \qquad \left|\ \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} = \left(\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right. \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\frac{3}{2}}} 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\left(\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_{=1}\right) \\ &= \frac{-\|\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^3} + \frac{n}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{n-1}{\|\boldsymbol{x}\|}\end{aligned}$$

im $\mathbb{R}^2$ $\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^2}}$
im $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{2}{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^3}}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}\right).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &:= \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{w} &:= \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2x_2) & - & 0 \\ 2x_3 & - & (-2x_1) \\ 1 & - & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & - & 2 \\ 0 & - & 0 \\ 2 & - & (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie Δu für folgende Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$.

$$u(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}, \qquad u(\boldsymbol{x}) = \ln(\|\boldsymbol{x}\|).$$

Für welche n gilt $\Delta u = 0$?

Lösung:

- $u(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha} \implies \operatorname{grad} \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha} = \alpha \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-2} \boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}
\Delta u &:= \operatorname{div}\operatorname{grad} \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha} \\
&= \operatorname{div}\Big(\alpha \underbrace{\|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-2}}_{f} \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}}\Big) \\
&= \alpha\left(\left(\operatorname{grad} \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-2}\right) \cdot \boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-2} \operatorname{div} \boldsymbol{x}\right) \\
&= \alpha\left(\left((\alpha-2)\, \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-4} \boldsymbol{x}\right) \cdot \boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-2} n\right) && \Big| \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \\
&= \alpha\,(\alpha - 2 + n)\, \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-2}
\end{aligned}$$

  Also gilt für $n = 3$ und $\alpha = -1$, dass $-1-2+3 = 0$ und somit $\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0$. Für $n = 2$ folgt $\alpha = 0$, dieser Fall ist jedoch langweilig, da $u \equiv 1$ (und für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ streng genommen nicht definiert ist).

- $u(\boldsymbol{x}) = \ln \|\boldsymbol{x}\| \implies \operatorname{grad}(\ln \|\boldsymbol{x}\|) = \|\boldsymbol{x}\|^{-2}\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}
\Delta u :&= \operatorname{div} \operatorname{grad}(\ln \|\boldsymbol{x}\|) \\
&= \operatorname{div}\Big(\underbrace{\|\boldsymbol{x}\|^{-2}}_{f}\underbrace{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}}\Big) \\
&= \big((\operatorname{grad} \|\boldsymbol{x}\|^{-2})\cdot\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{x}\|^{-2} \operatorname{div} \boldsymbol{x}\big) \\
&= \big(((-2)\,\|\boldsymbol{x}\|^{-4}\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{x}\|^{-2} n\big) && \big|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \\
&= (-2+n)\,\|\boldsymbol{x}\|^{-2}
\end{aligned}$$

Und somit gilt $\Delta u = 0$ für $n = 2$.

Aufgabe 6

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{v} : G \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{c}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ eine symmetrische Jacobi-Matrix besitzt, aber kein Potentialfeld in G ist. Woran liegt das?

Lösung: Wir untersuchen zunächst die Jacobi-Matrix. Da sowohl die dritte Komponente des Vektorfeldes als auch alle partiellen Ableitungen nach z Null sind, interessieren uns nur die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial y} &= c\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = c\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial v_2}{\partial x} &= c\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = c\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Die gesamte Jacobi-Matrix lautet

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}) = \frac{c}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} 2xy & -x^2+y^2 & 0 \\ -x^2+y^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

woraus $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ folgt. Wir betrachten das Arbeitsintegral entlang der geschlossenen Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, t \in [0, 2\pi]$. Mit $x^2+y^2 = 1$ entlang γ, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)^T$ und trigonometrischen Pythagoras folgt

$$\int_\gamma \boldsymbol{v}\mathrm{d}s = c\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)^T \cdot (-\sin t, \cos t, 0)^T \mathrm{d}t = c\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi c.$$

Aufgrund der Wegunabhängigkeit bei existierendem Potential sowie der Geschlossenheit der Kurve müsste dieses Integral jedoch Null sein. Ergo kann es kein Potential auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ geben.

Grund hierfür ist die Verletzung der Voraussetzung von Satz 13.8. Die Menge G ist der $\mathbb{R}^3$ ohne die z-Achse. Somit ist G weder ein konvexes Gebiet, noch einfach zusammenhängend. (Letzteres gilt, da die z-Achse durch den gesamten Raum verläuft und das Gebiet topologisch äquivalent zu einem Torus ist. Die Existenz eines Loches ist im Gegensatz zum $\mathbb{R}^2$ nicht ausreichend.)

Alternativ können wir versuchen ein Potential zu bestimmen, also eine Funktion φ mit $\nabla\varphi = \boldsymbol{v}$. Mit $\arctan' t = \frac{1}{1+t^2}$ folgt

$$\int \frac{\pm c}{c^2+t^2}\mathrm{d}t = \pm\arctan\left(\frac{t}{c}\right) + D.$$

Durch Integration der ersten beiden Komponenten von $\boldsymbol{v}$ erhalten wir also

$$\varphi = \int v_1 \mathrm{d}x = \int \frac{-y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C(y) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(y),$$
$$\varphi = \int v_2 \mathrm{d}y = \int \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(x).$$

Diese beiden Funktionen lassen sich auf geschlossenen Kurven, welche die z-Achse umrunden nicht stetig fortsetzen, was allerdings Vorraussetzen für Diffbarkeit wäre.

Aufgabe 7

Überprüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$$

ein Vektorpotential besitzt und berechnen Sie gegebenenfalls ein Vektorpotential $\boldsymbol{w}$ von $\boldsymbol{v}$.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass $\boldsymbol{v}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert ist und $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ gilt. Somit existiert nach Satz 13.10 ein Vektorpotential $\boldsymbol{w}$, d.h. es gilt $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$, woraus die Gleichungen

$$y = \frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} \tag{1}$$
$$z = \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} \tag{2}$$
$$x = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \tag{3}$$

Dies ist nicht eindeutig lösbar. Wir wählen deshalb den Ansatz $w_3 = c = \text{const}$ und erhalten aus (1)

$$y = -\frac{\partial w_2}{\partial z} \Longrightarrow w_2 = -\int y \mathrm{d}z = -yz + C(x,y).$$

Weiter ergibt sich aus (2)

$$z = \frac{\partial w_1}{\partial z} \Longrightarrow w_1 = \int z \mathrm{d}z = \frac{z^2}{2} + D(x,y).$$

Wir setzen nun beides in (3) ein und erhalten

$$x = \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,y)}{\partial y},$$

welches zum Beispiel für $C = 0, D = -xy$ erfüllt ist. Somit ist ein mögliches Vektorpotential

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{2} - xy \\ -yz \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es ist zu beachten, dass $\boldsymbol{w}$ nur bis auf Potentialfelder (und Konstanten) eindeutig ist.