



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
BERGAKADEMIE FREIBERG

Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

# Grundlagen GIS

Sommersemester 2024

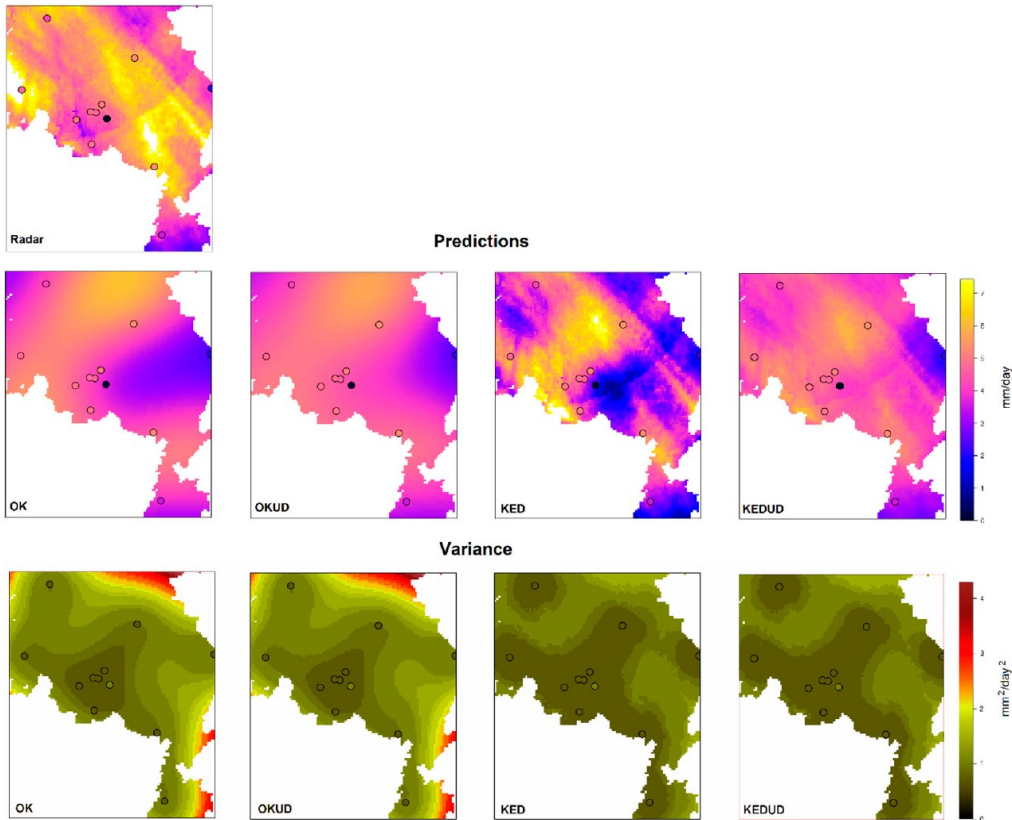
Prof. Christian Gerhards  
Arbeitsgruppe Geomathematik und Geoinformatik

OPAL:

<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873?6>

Institut für Geophysik und Geoinformatik - TU Bergakademie Freiberg

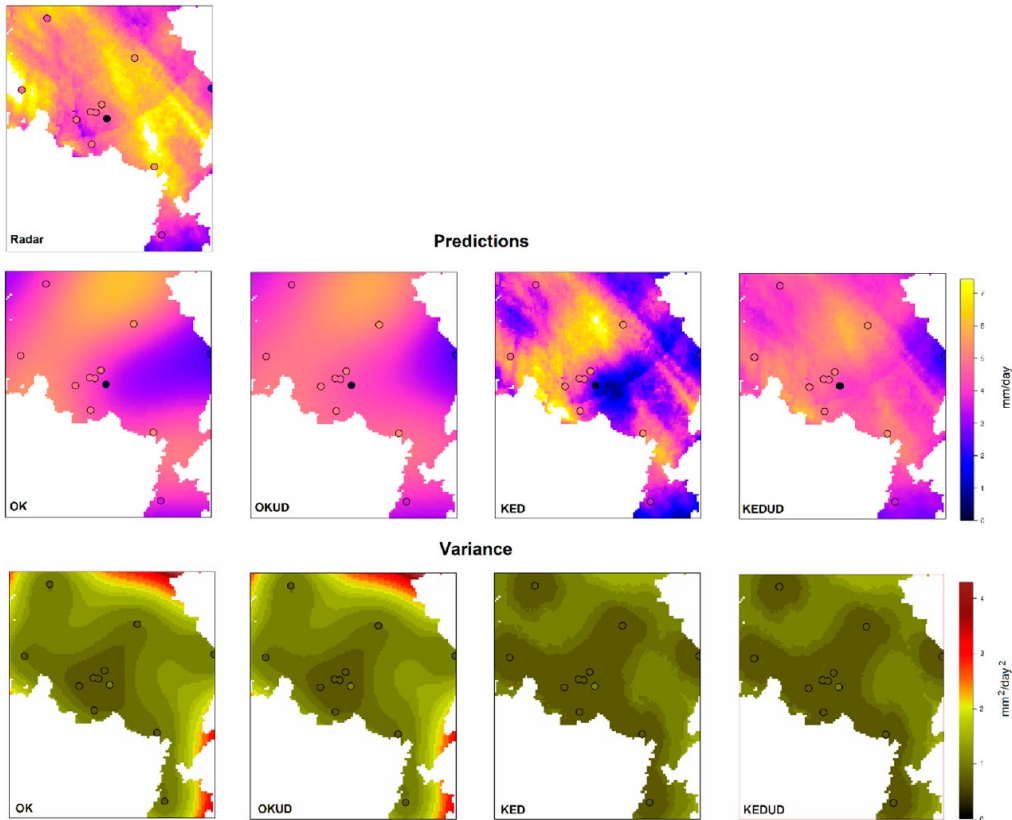
- Kriging (Simple, Ordinary, Universal)
- Conditional Simulation



Cecinati et al.: Considering Rain Gauge Uncertainty Using Kriging for Uncertain Data, Atmosphere (2018)

- Kriging (Simple, Ordinary, Universal)

- ~~Conditional Simulation~~



Cecinati et al.: Considering Rain Gauge Uncertainty Using Kriging for Uncertain Data, Atmosphere (2018)

# Kriging

Der Messwert  $Z_i$  an einer Position  $x_i \in \mathbb{R}^n$  kann als Zufallsvariable mit **Erwartungswert**

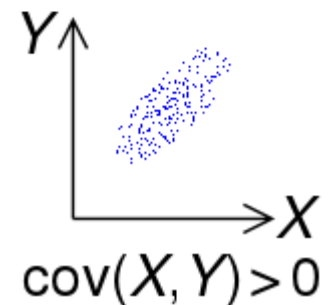
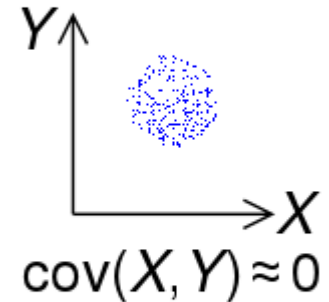
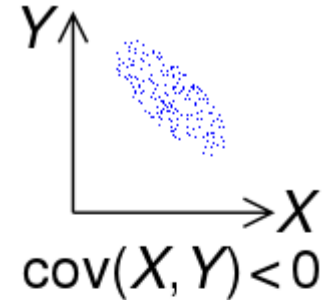
$$E[Z_i] = \int_{\Omega} z d\mu_{Z_i}(z)$$

und **Varianz**

$$\text{Var}(Z_i) = E[(Z_i - E[Z_i])^2].$$

Die **Kovarianz** zwischen zwei Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - E[Z_i])(Z_j - E[Z_j])].$$



# Kriging

Der Messwert  $Z_i$  an einer Position  $x_i \in \mathbb{R}^n$  kann als Zufallsvariable mit **Erwartungswert**

$$E[Z_i] = \int_{\Omega} z d\mu_{Z_i}(z)$$

und **Varianz**

$$\text{Var}(Z_i) = E[(Z_i - E[Z_i])^2].$$

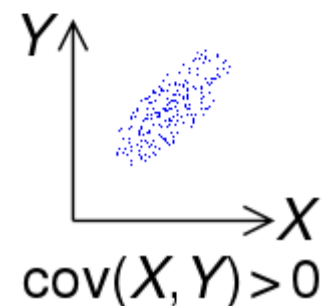
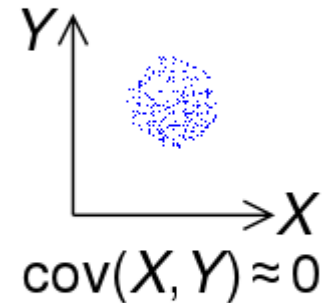
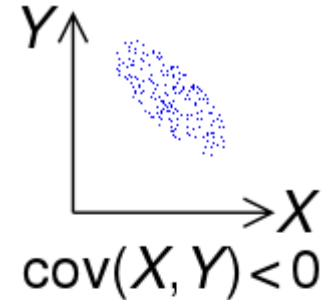
Die **Kovarianz** zwischen zwei Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - E[Z_i])(Z_j - E[Z_j])].$$

In der Geostatistik ist die so genannte **Stationaritäts\*-Annahme** von entscheidender Bedeutung:

$$E[Z(x)] = m, \quad \text{Cov}(Z(x + h), Z(x)) = \text{Cov}(h).$$

**Die Kovarianz hängt nur vom Inkrement  $h$  zwischen Positionen und nicht von den Positionen selbst ab.**



\* *stationarity, homogeneity*

Die Näherung  $Z^*$  von  $Z$  ist gegeben durch

$$Z^*(x) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) Z_i,$$

mit den unbekanntenen Gewichten  $\lambda_i(x)$  so dass

$$Z^*(x_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Die Näherung  $Z^*$  von  $Z$  ist gegeben durch

$$Z^*(x) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) Z_i,$$

mit den unbekanntenen Gewichten  $\lambda_i(x)$  so dass

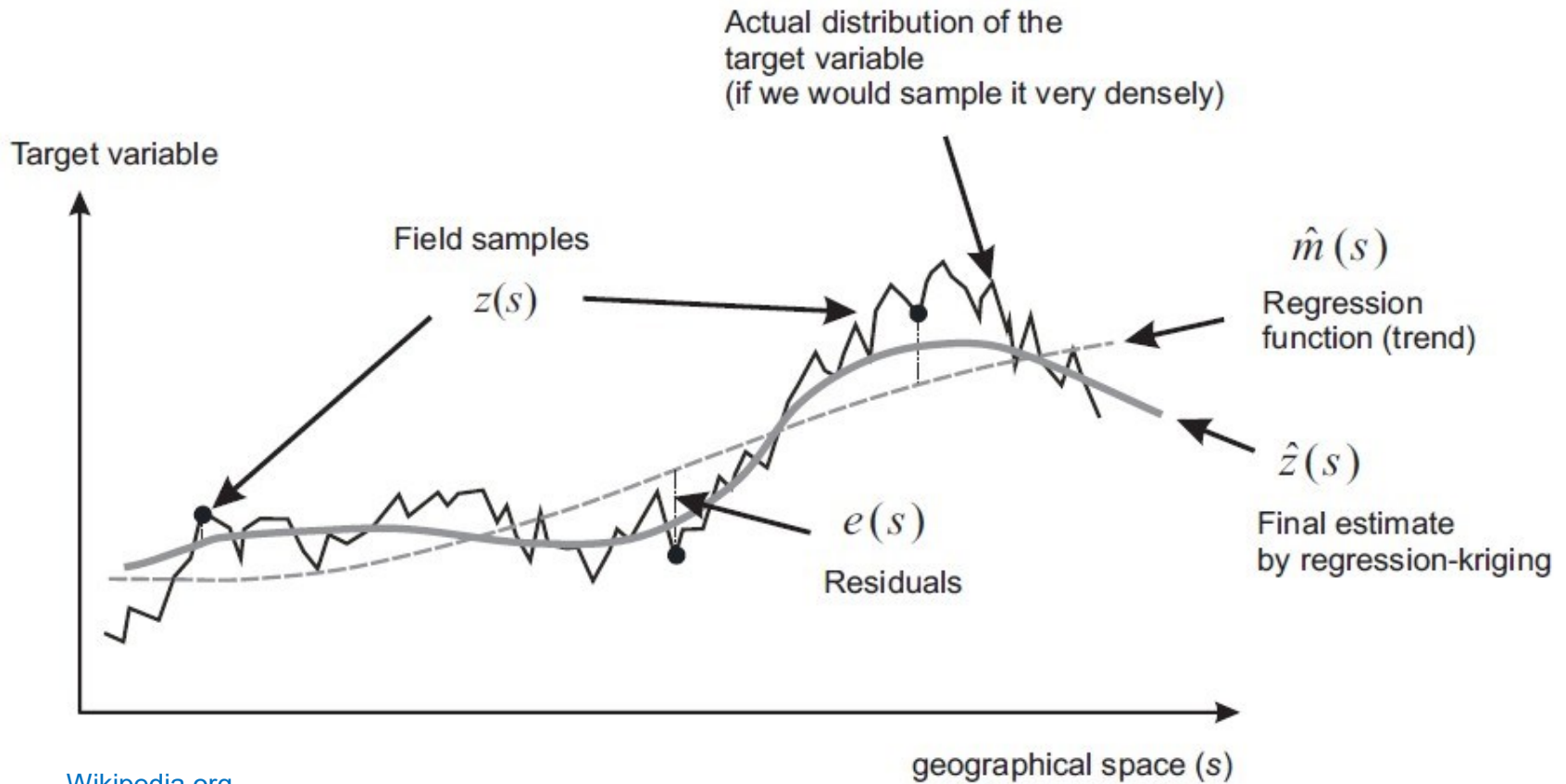
$$Z^*(x_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Welche Annahmen kann man zur Bestimmung der Gewichte treffen?

**Unbiasedness** (unverfälscht, ideal):  $E[Z^*(x)] = E[Z(x)]$

**Varianz-Minimierung:**  $\min_{Z^*} \text{Var}(Z^*(x) - Z(x))$

# Kriging



Wikipedia.org

# Kriging

**Simple Kriging:** Erwartungswert  $m_0 = E(Z(x))$  ist bekannt; Unbiasedness-Annahme führt zu

$$\lambda_0 = m_0 - \sum_{i=1}^N \lambda_i m_0.$$

**Simple Kriging:** Erwartungswert  $m_0 = E(Z(x))$  ist bekannt; Unbiasedness-Annahme führt zu

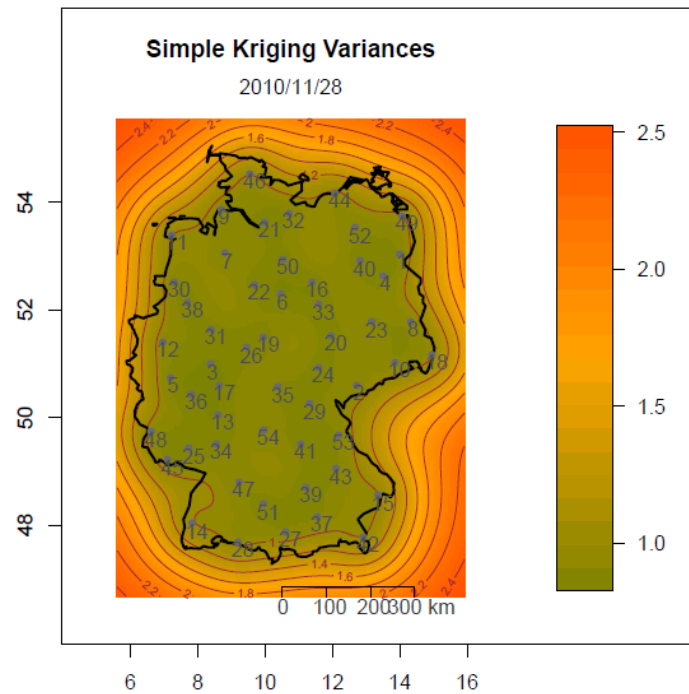
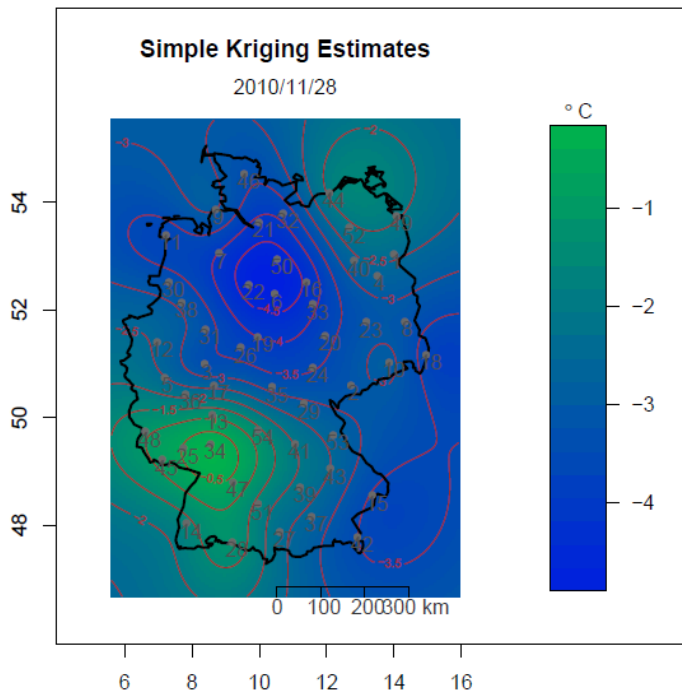
$$\lambda_0 = m_0 - \sum_{i=1}^N \lambda_i m_0.$$

Varianz-Minimierung führt zu:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \text{Cov}(Z_i, Z_k) = \text{Cov}(Z_i, Z(x)), \quad k = 1, \dots, N$$

Aufgrund der Stationaritäts-Annahme gilt:  $\text{Cov}(Z_i, Z(x)) = \text{Cov}(x_i - x) \rightarrow$  Ähnlichkeit zu radialen Basisfunktionen.

# Kriging



Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

# Kriging

Im Allgemeinen ist  $\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j))$  nicht bekannt und muss geschätzt oder modelliert werden.

Dafür spielt das so genannte **Variogramm** eine entscheidende Rolle:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x + h)) = C(0) - C(h).$$

Das Variogramm kann unter bestimmten Bedingungen aus den Daten geschätzt werden.

Im Allgemeinen ist  $\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j))$  nicht bekannt und muss geschätzt oder modelliert werden.

Dafür spielt das so genannte **Variogramm** eine entscheidende Rolle:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h)) = C(0) - C(h).$$

Das Variogramm kann unter bestimmten Bedingungen aus den Daten geschätzt werden.

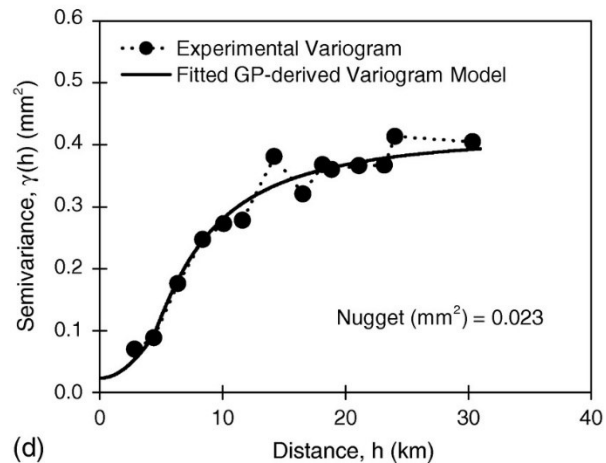
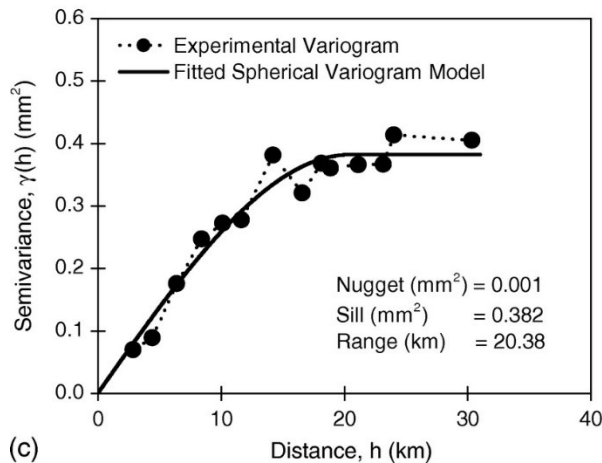
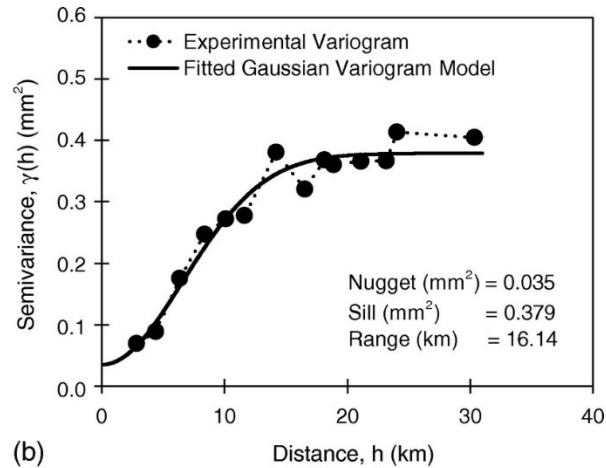
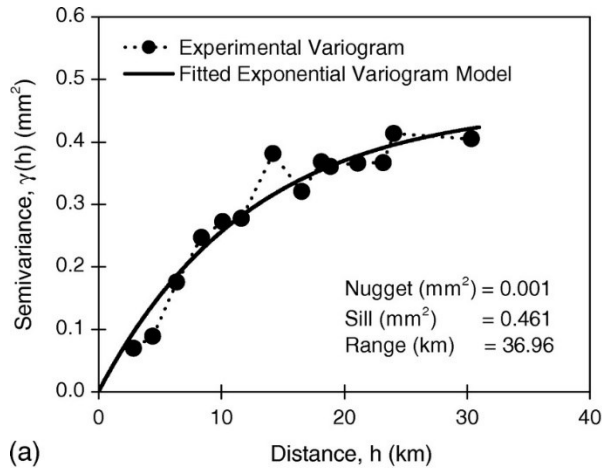
**Empirisches Variogramm:**

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{x_i - x_j = h} (Z_i - Z_j)^2.$$

An das empirischen Variogramms kann ein analytisches Variogrammmodell angepasst werden. Diese Modellfunktion muss dabei bestimmte Eigenschaften erfüllen.

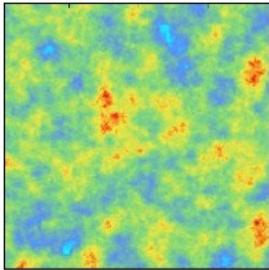
Sie muss z.B. semi-positiv definit sein, d. H. alle Eigenwerte sind größer gleich Null.

# Kriging

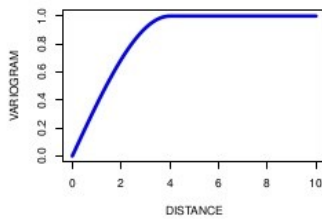


# Kriging

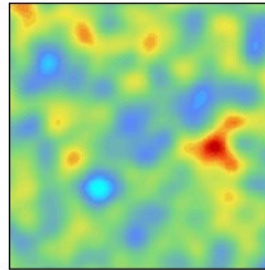
Rough



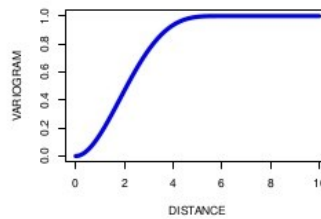
Spherical model



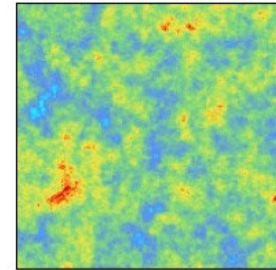
Smooth



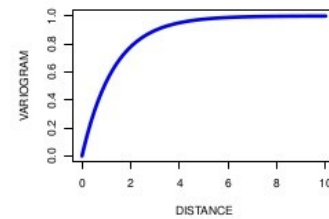
Cubic model



Rough

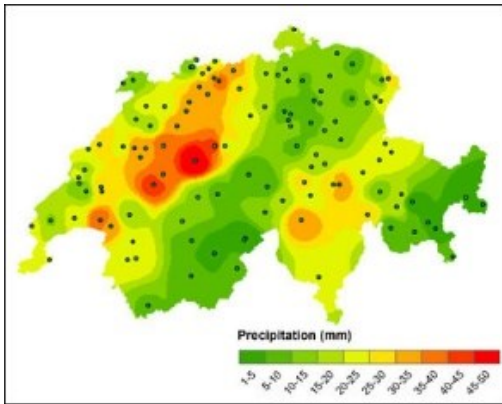
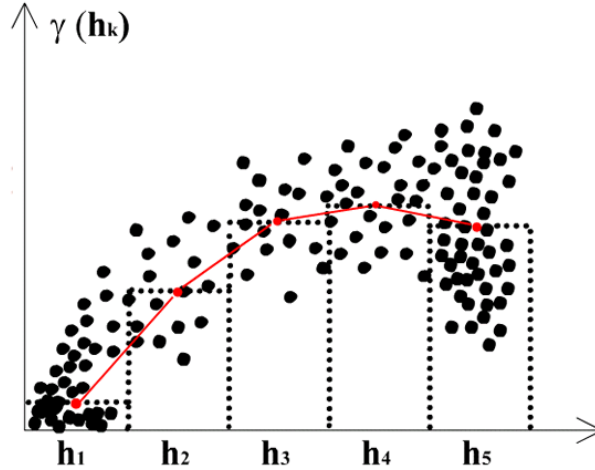


Exponential model

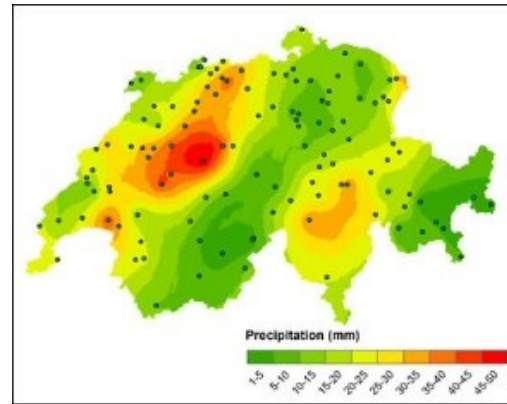


From a presentation by H. Wackernagel

# Example IDW, Kriging

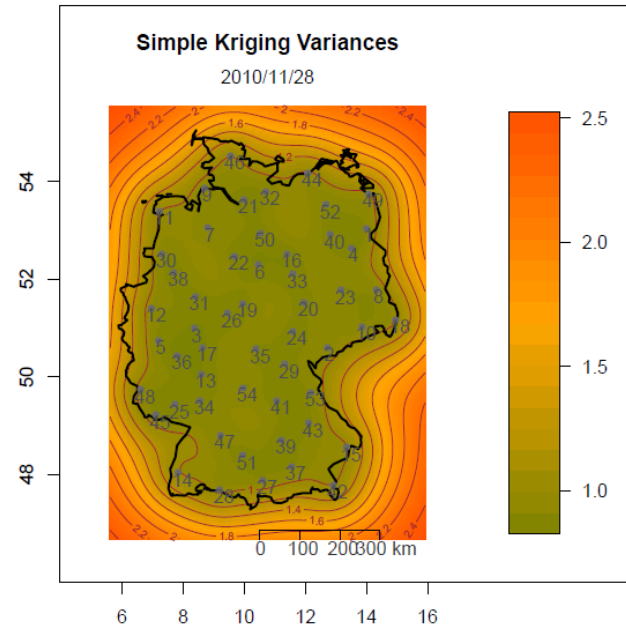
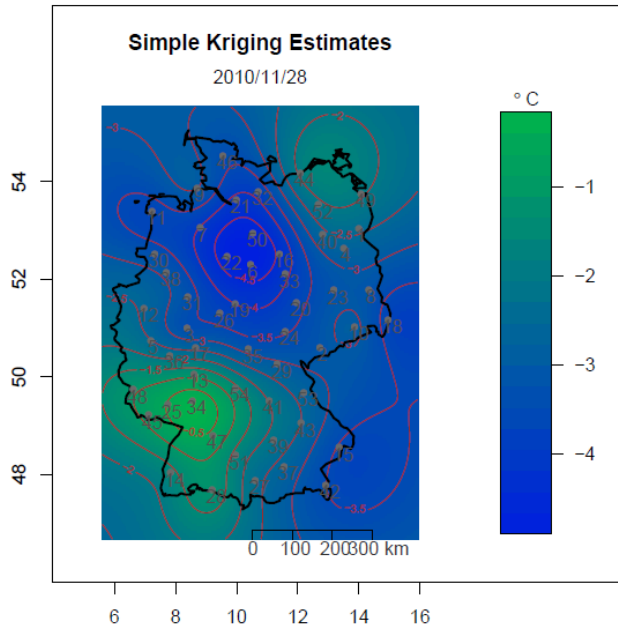


IDW



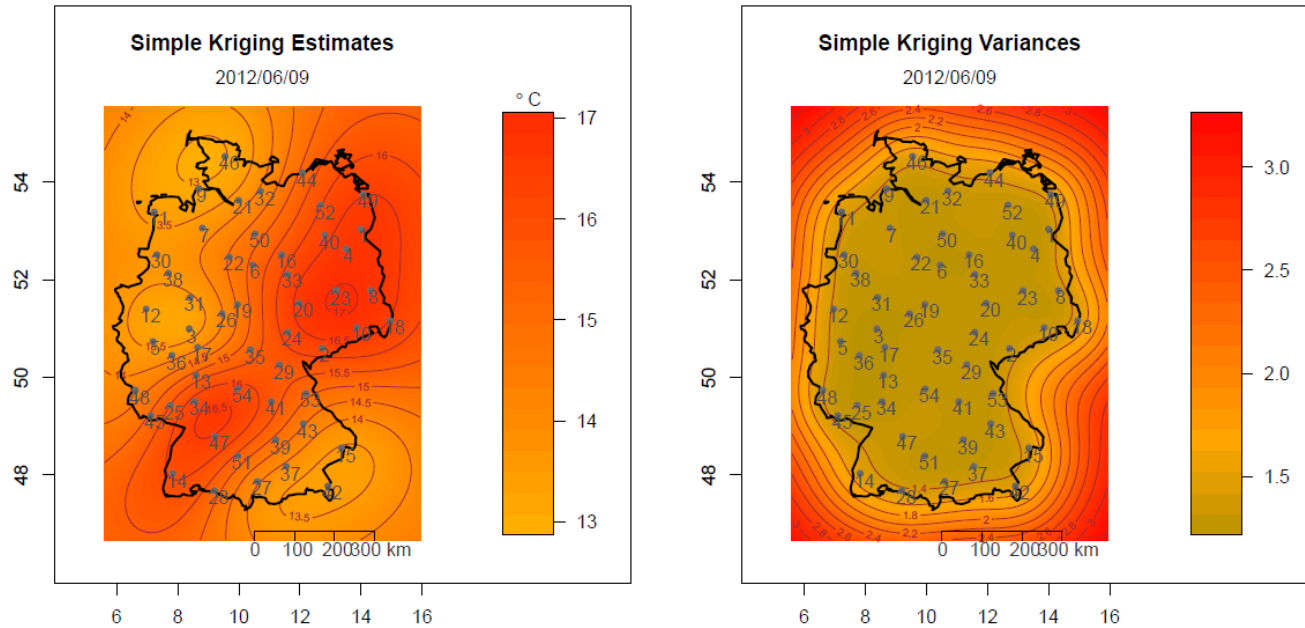
Kriging

# Example Kriging



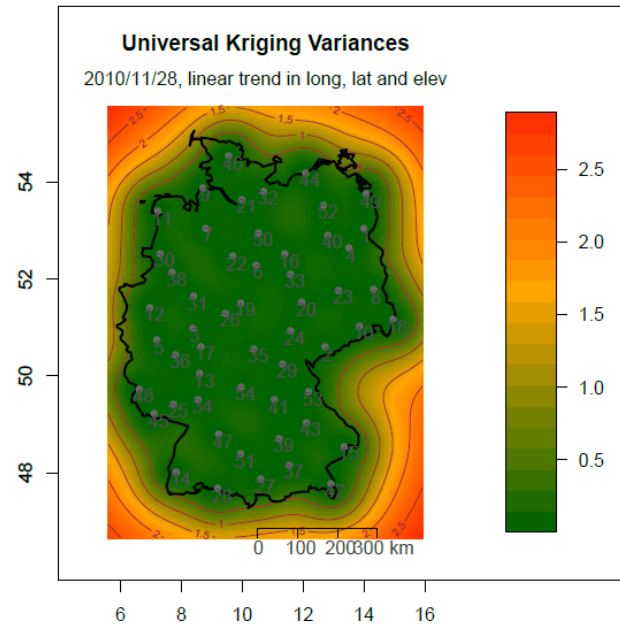
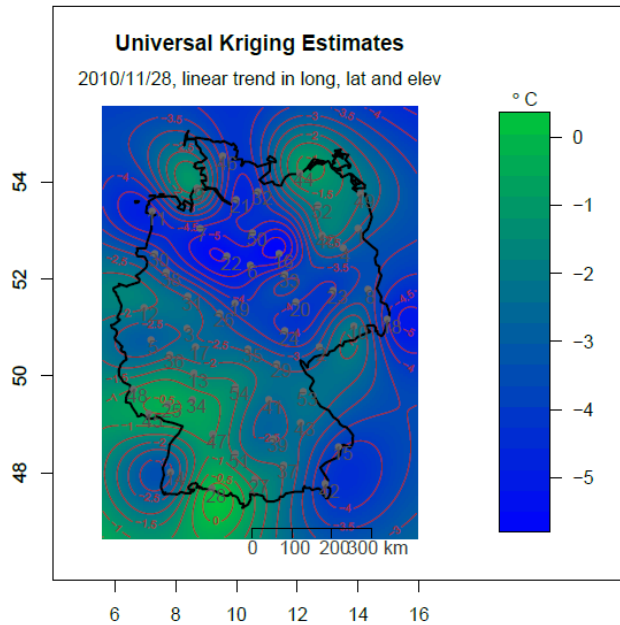
Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

# Example Kriging



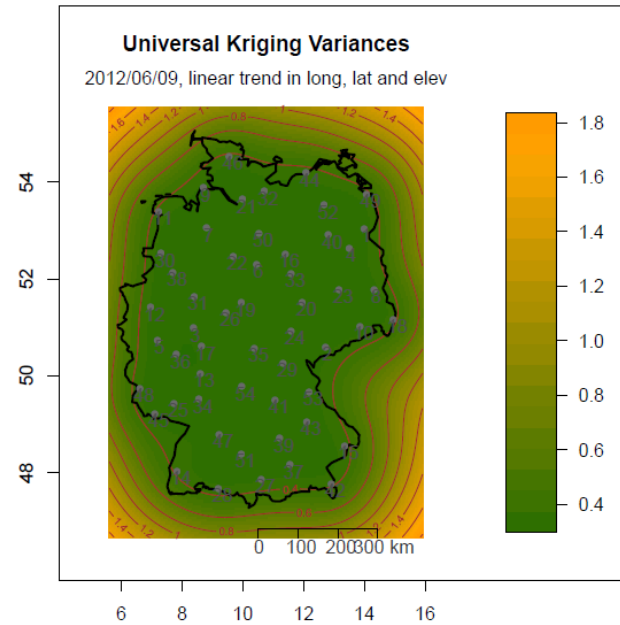
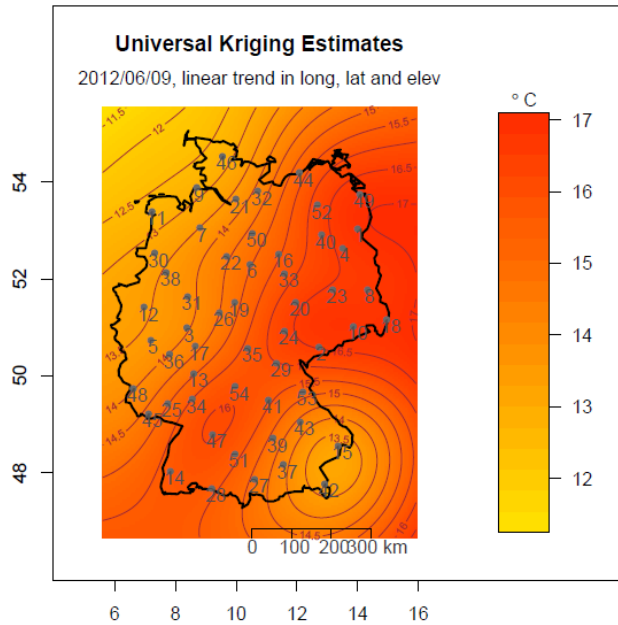
Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

# Example Kriging



Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

# Example Kriging



Example from the Bachelor thesis "Kriging methods in spatial statistics", Andreas Lichtenstern, TU München

## Ausgangslage:

Gegeben sind bekannte Werte  $y_i$  (z.B. Messungen) für einen Parameter an gegebenen Positionen  $x_i$ . An beliebigen Positionen  $x$  sollen die ggf. unbekanntes Werte  $y$  vorhergesagt werden.

## Interpolation:

Interpolation umfasst alle mathematischen Verfahren, welche eine Funktion  $f(x) = y$  für eine solche Vorhersage verwenden. Klassischerweise hat bei einer linearen Interpolation  $f(x)$  die Form eines gewichteten Mittels der gegebenen Werte  $y_i$ :

$$f(x) = \sum_i \lambda_i(x) \cdot y_i$$

mit den Gewichten  $\lambda_i(x)$ . Die Bestimmung der Gewichte hängt vom gewählten Verfahren ab.

## Approximation und Interpolation:

Für eine klassische (exakte) Interpolation gilt, dass das Verfahren die Daten exakt reproduziert mit

$$f(x_i) = y_i$$

Bei einer Approximation (oder auch nicht-exakte Interpolation) ist dies nicht der Fall, die Daten werden hier nur angenähert mit

$$f(x_i) = y_i + \epsilon_i \rightarrow f(x_i) \approx y_i$$

$\epsilon_i$  ist dabei der unbekannte Approximationsfehler.

## Interpolation und Extrapolation:

Findet die Vorhersage innerhalb der Daten statt, handelt es sich um eine Interpolation. Die Ergebnisse können zumeist als plausibel angesehen werden, da genügend Daten als Randbedingungen für die Vorhersage zu Verfügung stehen.

Findet die Vorhersage außerhalb der Daten oder sehr weit entfernt statt, handelt es sich um eine Extrapolation. Die Ergebnisse können zumeist nicht als plausibel angesehen werden und sollte sehr kritisch interpretiert werden, da die Daten nur sehr eingeschränkt als Randbedingungen verwendet werden können.

## Lokale und globale Interpolation:

Bei einer lokalen Interpolationen werden nicht alle Datenwerte für die Interpolation verwendet. Dies bedeutet, dass es Datenwerte  $y_i$  gibt, für das Interpolationsgewicht gleich Null ist:

$$\exists i: \lambda_i(x) = 0$$

Bei einer globalen Interpolationen werden immer alle gegebenen Werte berücksichtigt, d.h. dass es keine Interpolationsgewichte gibt, welche Null sind:

$$\forall i: \lambda_i(x) \neq 0$$

## Gitterfreie und gitterbasierte Interpolation:

Benötigt ein Interpolationsverfahren eine Vermaschung der Datenpunkte wird es als *gitterbasiert* bezeichnet. Es ist dann zumeist ein lokales Verfahren, welches nur die Datenwerte verwendet, welche sich auf die Zelle beziehen, in der der Interpolationspunkt  $x$  liegt.

*Gitterfreie (grid-free)* Verfahren benötigen keine Vermaschung, sind aber zumeist globale Verfahren.

## **Deterministische Interpolation:**

Die Bestimmung der Gewichte basiert auf einem festgelegten mathematischen Modell. Es ist zumeist nicht initial möglich, die „Unsicherheit“ der Vorhersage abzuschätzen.

## **(Geo-)statistische Interpolation (z.B. kriging):**

Die Bestimmung der Gewichte basiert zusätzlich auf der bekannten oder abgeschätzten räumlichen Korrelation der Daten. Dies ist zumeist aufwändiger als deterministische Vorhersage, erlaubt aber die zusätzliche Abschätzung der „Unsicherheit“ der Vorhersage.

## **Wahl des Interpolationsverfahrens:**

Bei der Wahl des Vorhersageverfahrens sollten folgende Fragen berücksichtigt werden:

1. Entspricht das mathematische Modell des Verfahrens dem vorherzusagenden Parameter bzgl.
  - Skala (diskret/kontinuierlich/...)
  - Glattheit / Differenzierbarkeit ...
  - ... ?
2. Ist Extrapolation für Anwendung notwendig?
3. Ist für die Anwendung exakte Interpolation notwendig oder reicht auch Approximation?
4. Welche Komplexität des Verfahrens ist für die Daten/Anwendung angemessen?
5. ...

1. Definitionen, Funktionen, Anwendungen
2. Koordinatensysteme und -transformationen
3. Räumliche Datenmodellierung
4. Vermaschungen
5. Räumliche Interpolation
- 6. Transformationen, Filtermethoden**

# Filter Methoden

Anstelle eines „wahren“ Rasterbildes liegt typischerweise ein **verraushtes Bild** vor, mit

$$f = f_{\text{true}} + n,$$

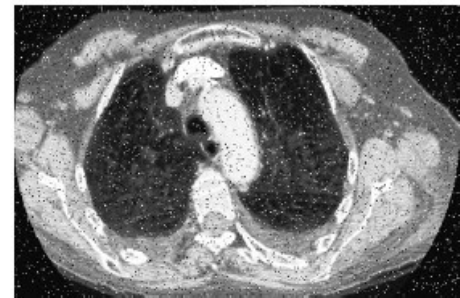
wobei der Fehler  $n$  mit verschiedenen Modellen beschrieben werden kann (z.B. Gauß-verteilt, „*gaussian noise*“). **Rauschentfernung / „Denoising“** beschreibt das Problem, eine Schätzung  $g \approx f_{\text{true}}$  aus dem Wissen von  $f$  zu erhalten.



Original



Original mit „*Gaussian noise*“



Original mit „*Salt and Pepper noise*“

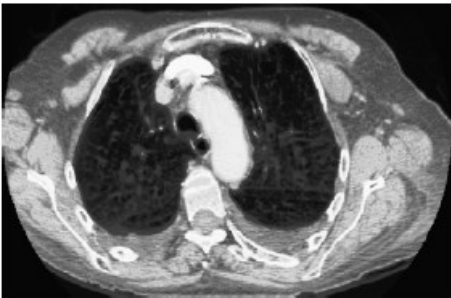
# Filter Methoden

Anstelle eines „wahren“ Rasterbildes liegt typischerweise ein **verraushtes Bild** vor, mit

$$f = f_{\text{true}} + n,$$

wobei der Fehler  $n$  mit verschiedenen Modellen beschrieben werden kann (z.B. Gauß-verteilt, „*gaussian noise*“). **Rauschentfernung / „Denoising“** beschreibt das Problem, eine Schätzung  $g \approx f_{\text{true}}$  aus dem Wissen von  $f$  zu erhalten.

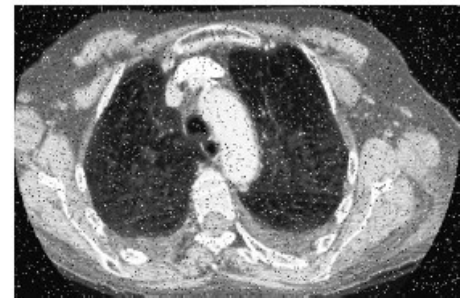
Rauschentfernung ist oft eine initialer Operation für weiter Bildbearbeitungsschritte.



Original



Original mit „*Gaussian noise*“



Original mit „*Salt and Pepper noise*“

# Filter Methoden

**Konvolution:** Gegeben sein ein *Kernel*  $w = [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die Konvolution einer Funktion  $f$  mit  $w$  ist definiert über

$$g(x, y) = (w * f)(x, y) = \int_{[0,1]^2} w(x - u, y - v) f(u, v) du, dv.$$

**Fourier-Transformation:** Die Fourier-Transformation einer Funktion  $f$  ist definiert über

$$F(u, v) = \hat{f}(u, v) = \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(x,y) \cdot (u,v)} f(x, y) dx dy.$$

**Konvolution und Fourier-Transformation:** Die Fourier-Transformation einer Konvolution hat folgende Eigenschaft:

$$G(u, v) = W(u, v)F(u, v)$$

# Filter Methoden

**Konvolution:** Gegeben sein ein *Kernel*  $w = [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die Konvolution einer Funktion  $f$  mit  $w$  ist definiert über

$$g(x, y) = (w * f)(x, y) = \int_{[0,1]^2} w(x - u, y - v) f(u, v) du, dv.$$

**Fourier-Transformation:** Die Fourier-Transformation einer Funktion  $f$  ist definiert über

$$F(u, v) = \hat{f}(u, v) = \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(x,y) \cdot (u,v)} f(x, y) dx dy.$$

**Konvolution und Fourier-Transformation:** Die Fourier-Transformation einer Konvolution hat folgende Eigenschaft:

$$G(u, v) = W(u, v)F(u, v)$$

Die Wahl der Kernelfunktion  $w$  oder  $W$ , entweder im Orts- oder Spektralbereich, bestimmt die Eigenschaften der Konvolution (Filter).

Diskrete Repräsentation / Pixel-Setup:

**Konvolution:** Gegeben sein ein Kernel  $w \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times (2L+1)}$ , die diskrete Konvolution von  $f$  mit  $w$  ist definiert über

$$g(m, n) = (w * f)(m, n) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L w(k, l) f(m - k, n - l)$$

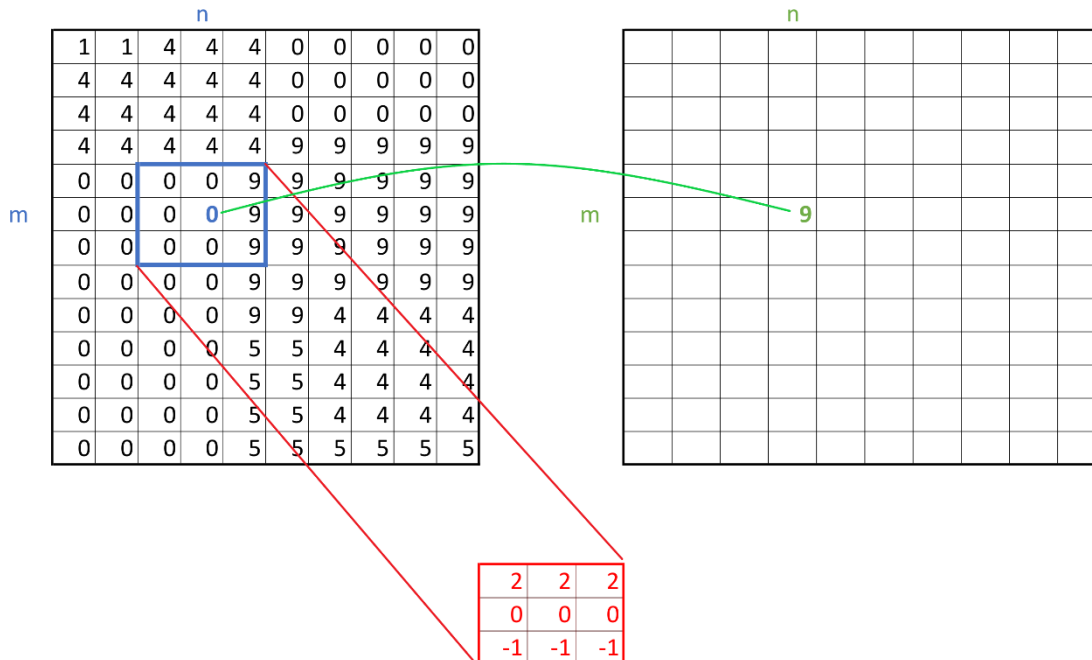
1	1	4	4	4	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	9	9	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	4	4	4	4
0	0	0	0	5	5	5	5	5	5

# Filter Methoden

Diskrete Repräsentation / Pixel-Setup:

**Konvolution:** Gegeben sein ein Kernel  $w \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times (2L+1)}$ , die diskrete Konvolution von  $f$  mit  $w$  ist definiert über

$$g(m, n) = (w * f)(m, n) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L w(k, l) f(m - k, n - l)$$



Beispiele für diskrete Kernelfunktionen  $w$ :

**Mittelwertkernel / Averaging Kernel** in einer  $(2K + 1) \times (2L + 1)$ -Nachbarschaft.

Für  $L = K = 1$ :

$$w = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Gauß-Kernel** mit Gewichtsfunktion  $w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}$ . Für  $L = K = 2$  und  $\sigma = 1$ :

$$w = \frac{1}{271} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gaußfilter ist ein Spezialfall eines Diffusionsfilters.

0	0.2	0
0.2	0.2	0.2
0	0.2	0

5	3	6	1	5
4	4	7	4	5
6	5	2	1	2
7	6	1	0	2
8	6	2	1	3


[Animation siehe OPAL!](https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975) (https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/19758415873/CourseNode/102027240864975)

# Filter Methoden

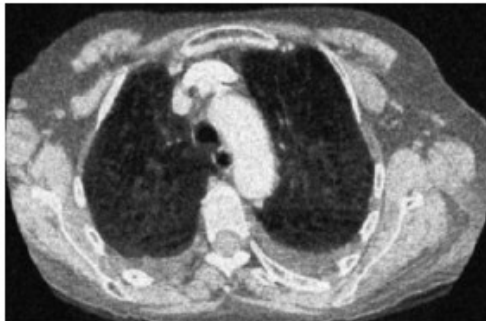
Original



Gauß-verteiltes rauschen



Ergebnis Gaußfilter



Ergebnis Mittelwertfilter

