

---

## Optimierung für Mathematiker/innen

### Übung 9

---

#### Aufgabe 34: Operationen auf konvexen Mengen

Beweise Teil (c), (d) und (e) von Satz 11.3 aus der Vorlesung.

#### Aufgabe 35: Minkowski-Summe am Beispiel

In der Ebene sei  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\}$  eine Kreisfläche und  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 2\}$  die Vereinigung der Seiten eines Quadrates. Beschreibe die Minkowski-Summe  $K + Q$  anhand einer Skizze.

#### Aufgabe 36: Jensensche Ungleichung

Es sei  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Zeige, dass  $f$  genau dann konvex ist, wenn für beliebige endliche Mengen  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset C$  und beliebige  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$  mit  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$  und  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \geq 0$  gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i).$$

#### Aufgabe 37: Beispiel einer gleichmäßig konvexen Funktion

Zeige, dass die Funktion  $\|Ax - b\|^2$  genau dann gleichmäßig konvex ist, wenn  $A$  injektiv ist, d. h.  $A$  vollen Spaltenrang hat.

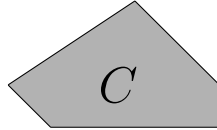
#### Aufgabe 38: Für konvexe Mengen $C$ ist $\text{dist}_C$ eine konvexe Funktion

Es sei  $C \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge sowie

$$\text{dist}_C(x) := \inf_{y \in C} \|y - x\|_2$$

der Abstand eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  zur Menge  $C$ .

(a) Skizziere für



die Levelmengen  $\mathcal{L}_{\text{dist}_C}(r) := \{x : \text{dist}_C(x) \leq r\}$ .

(b) Zeige, dass  $\text{dist}_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion ist.

### Aufgabe 39: Zur Abgeschlossenheit von $\text{conv } A$

Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen. Ist dann auch  $\text{conv } A$  abgeschlossen?

### Hausaufgabe 20: Der Epigraph ist genau dann konvex, wenn $f$ konvex ist

Sei  $C \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe Menge und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Menge

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

heißt **Epigraph** von  $f$ . Zeige, dass  $f$  genau dann konvex ist, wenn  $\text{epi}(f)$  konvex ist. Gilt eine analoge Aussage auch für die Levelmengen  $\mathcal{L}_f(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\}$ , d.h.

$$f \text{ ist konvex} \iff \mathcal{L}_f(r) \text{ ist konvex für alle } r \in \mathbb{R}?$$

### Hausaufgabe 21: Abschätzung des Abstandes zum globalen Minimum durch die Werte der Zielfunktion

Es sei  $C \subset \mathbb{R}^n$  konvex,  $C \neq \emptyset$ . Weiter sei  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmäßig konvexe Funktion auf  $C$  und  $x^*$  das globale Minimum von  $f(x)$  über  $C$ .

(a) Man zeige, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Abschätzung

$$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\mu} |f(x) - f(x^*)|$$

gilt.

(b) Gilt dies auch, wenn man nicht voraussetzt, dass  $x^*$  ein globales Minimum von  $f(x)$  über  $C$  ist?