

**Mathematik IV (für IF, ET, Ph)**  
Sommersemester 2025

3. Übung: Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit

**Aufgabe 1**

Untersuchen Sie folgende Funktionen  $f(z) = f(x + iy)$  (auf dem maximalen Definitionsbereich betrachtet) unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Differenzierbarkeit. Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung  $f'(z)$  nur unter Verwendung von  $z$  an.

a)  $f(z) = z^2$ ,

b)  $f(z) = |z|^2$ ,

c)  $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ ,

d)  $f(z) = e^y(\sin x + i \cos x)$ ,

e)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,

f)  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ .

Lösung: Wiederholung: Es sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet (offene und zusammenhängende Menge) und  $z = x + iy \in D$ . Ist  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  diffbar in  $z$ , so gelten die Cauchy-Riemannschen DGL

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad v_x(x, y) = -u_y(x, y).$$

Weiter gilt

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

a)  $f = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ , somit gilt

$$u_x = 2x = v_y, \quad v_x = 2y = -u_y.$$

Somit ist  $f$  auf  $\mathbb{C}$  diffbar und es gilt  $f' = 2x + 2iy = 2z$ .

b)  $f = |z|^2 = x^2 + y^2$ , hier sind beide CR-DGL wegen

$$u_x = 2x \neq 0 = v_y, \quad v_x = 0 \neq -2y = -v_y$$

verletzt. Somit ist  $f$  nicht auf  $\mathbb{C}$  diffbar.

c)  $f = z \operatorname{Re}(z) = x^2 + ixy$ , auch hier sind die CR-DGL wegen

$$u_x = 2x \neq x = v_y, \quad v_x = y \neq 0 = -u_y$$

verletzt, weshalb  $f$  auf  $\mathbb{C}$  nicht diffbar ist.

d) Für  $f = e^y(\sin x + i \cos x)$  gilt

$$u_x = e^y \cos x = v_y, \quad v_x = -e^y \sin x = -u_y.$$

Somit ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  diffbar mit  $f' = e^y(\cos x - i \sin x) = e^{\operatorname{Im} z - i \operatorname{Re} z} = e^{-iz}$ . Bemerkung: Dies passt auch zu  $f(z) = ie^{-iz}$ .

e) Wir formen die Funktion zunächst etwas um:

$$f = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Wir erhalten somit

$$u_x = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = v_y, \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -u_y.$$

Somit ist  $f$  diffbar auf dem Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$f' = \frac{-x^2 + y^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-\bar{z}^2}{|z|^4} = -\frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

f) Mit der Umformung

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - 1} = 1 + \frac{2}{z - 1}$$

folgt analog, dass  $f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  holomorph ist mit

$$f'(z) = -\frac{2}{(z - 1)^2}.$$

## Aufgabe 2

Ist  $u(x, y)$  eine harmonische Funktion? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine zugehörige konjugiert harmonische Funktion und das zugehörige komplexe Potential.

- a)  $u(x, y) = x \sin y$ ,
- b)  $u(x, y) = \cos x \sinh y$ ,
- c)  $u(x, y) = -e^y \cos x$ .

Lösung: Wiederholung: Eine reelle Funktion  $u$  heißt harmonisch, falls  $\Delta u = 0$ . Die zu einer harmonischen Funktion  $u$  existierende Funktion  $v$  als Imaginärteil der analytischen Funktion  $f = u + iv$  nimmt man die zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion.

a) Die Funktion  $u(x, y) = x \sin y$  ist wegen

$$\Delta u(x, y) = \nabla \cdot \nabla u(x, y) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sin y \\ x \cos y \end{bmatrix} = 0 - x \sin x \neq 0$$

nicht harmonisch.

b) Die Funktion  $u(x, y) = \cos x \sinh y$  ist harmonisch, da

$$\Delta u(x, y) = \nabla \cdot \nabla u(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin x \sinh y \\ \cos x \cosh y \end{bmatrix} = -\cos x \sinh y + \cos x \sinh y = 0.$$

Die konjugiert harmonische Funktion  $v$  erhalten wir über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und geeignete Integration:

$$\begin{aligned} u_x = -\sin x \sinh y = v_y &\implies v = -\sin x \cosh y + C(x) \\ -u_y = -\cos x \cosh y = v_x &\implies v = -\sin x \cosh y + C(y). \end{aligned}$$

Somit ist  $v(x, y) = -\sin x \cosh y$  die zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion. Für das komplexe Potential ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \cos x \sinh y - i \sin x \cosh y \\ &= \cos x \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) - i \sin x \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} [e^y (\cos x - i \sin x) - e^{-y} (\cos x + i \sin x)] \\ &= \frac{1}{2} [e^y (\cos(-x) + i \sin(-x)) - e^{-y} (\cos x + i \sin x)] \\ &= \frac{1}{2} [e^{y-ix} - e^{-y+ix}] = \frac{1}{2} [e^{-i(x+iy)} - e^{i(x+iy)}] \\ &= -i \sin(x + iy) = -i \sin(z) \end{aligned}$$

c) Auch die Funktion  $u(x, y) = -e^y \cos x$  ist harmonisch:

$$\Delta u(x, y) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} e^y \sin x \\ -e^y \cos x \end{bmatrix} = e^y \cos x - e^y \cos x = 0.$$

Wir betrachten wieder die CR-DGL und erhalten

$$\begin{aligned} u_x &= e^y \sin x = v_y \implies v = e^y \sin x + C(x) \\ -u_y &= e^y \cos x = v_x \implies v = e^y \sin x + C(y). \end{aligned}$$

Die konjugiert harmonische Funktion zu  $u$  lautet also  $v(x, y) = e^y \sin x$ . Das komplexe Potential lautet also

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = -e^y \cos x + ie^y \sin x = -e^y (\cos x - i \sin x) \\ &= -e^y (\cos(-x) + i \sin(-x)) = -e^{y-ix} = -e^{-i(x+iy)} = -e^{-iz}. \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Sei  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Stellen Sie die Niveaulinien  $u(x, y) = 0$  und  $v(x, y) = 0$  graphisch dar. Berechnen Sie außerdem  $f'(z)$ .

a)  $f(z) = (1 + i)z,$

b)  $f(z) = z^2 - 1 - i.$

**Z:** Berechne die Tangentenvektoren

$$t_u = \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad t_v = \left( -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

und ihr Skalarprodukt  $t_u \cdot t_v$ . In welchem Verhältnis stehen  $t_u$  und  $t_v$  zueinander?

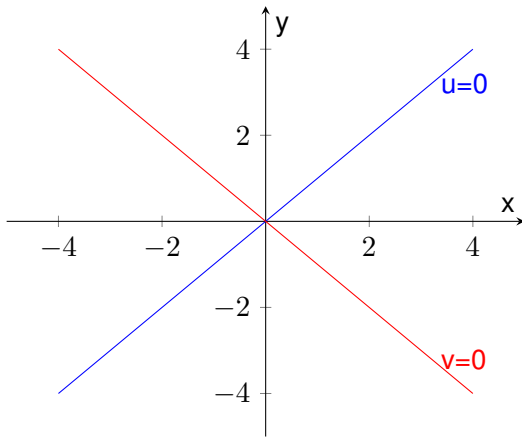
Lösung:

a) Wir formen die Funktion zunächst um und erhalten

$$f(z) = (1 + i)z = (1 + i)(x + iy) = \underbrace{(x - y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(x + y)}_{v(x,y)}.$$

Somit erhalten wir für die gesuchten Niveaulinien die Bedingungen

$$u(x, y) = 0 \iff x = y, \quad v(x, y) = 0 \iff x = -y.$$



Die Ableitung ergibt sich (entweder über CR-Bedingungen oder über "normale" Potenzregel) zu  $f'(z) = 1 + i$ . Wir untersuchen noch die Tangentialvektoren ergibt sich  $t_u = (1, 1)$  sowie  $t_v = (-1, 1)$ . Somit folgt  $t_u \cdot t_v = 0$ , was bedeutet, dass die Tangentialvektoren in jedem Punkt  $(x, y)$  senkrecht aufeinander stehen. Insbesondere sind auch obige Niveaulinien orthogonal.

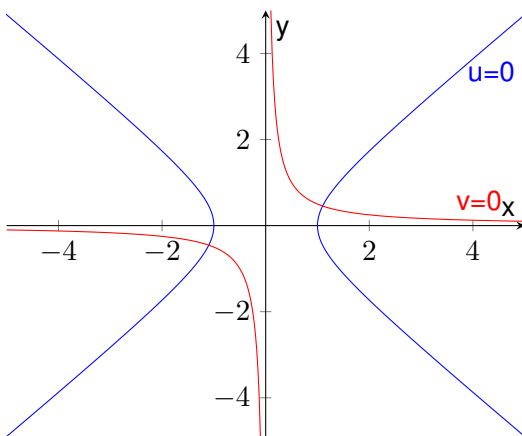
b) Wir bestimmen zunächst wieder Real- und Imaginärteil von  $f$ :

$$f(z) = z^2 - 1 - i = (x + iy)^2 - 1 - i = x^2 + 2xyi - y^2 - 1 - i = \underbrace{(x^2 - y^2 - 1)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(2xy - 1)}_{v(x,y)}.$$

Es folgen die Charakterisierungen

$$u(x, y) = 0 \iff x^2 - y^2 - 1 = 0 \iff |y| = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$v(x, y) = 0 \iff 2xy - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{2x}.$$



Die Ableitung lautet  $f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z$ . Auch hier stehen die Tangentialvektoren aufgrund von  $t_u = (2y, 2x)$ ,  $t_v = (-2y, 2x)$  und  $t_u \cdot t_v = 4xy - 4xy = 0$  orthogonal aufeinander.