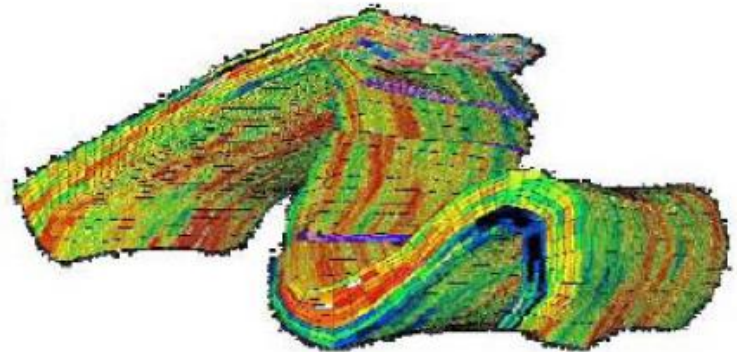
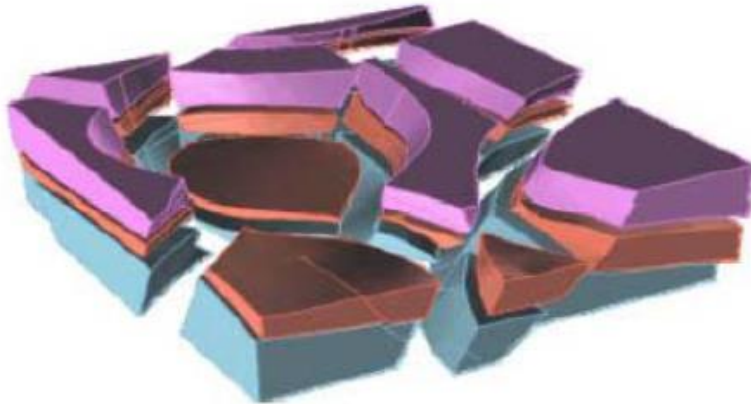


# 3D Geomodellierung

## 7. Skua-Gocad – Modellkonzept, Constraints und DSI



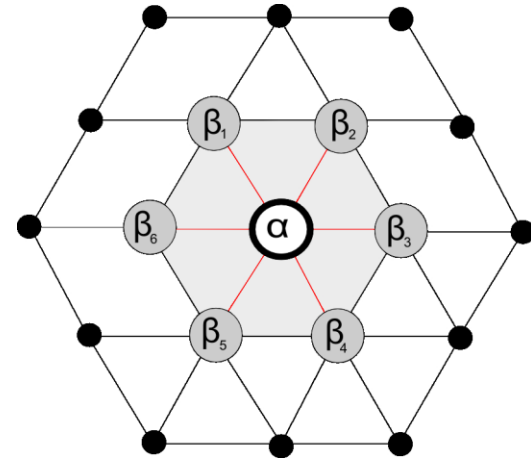
## Diskretes topologisches Modell $\mathcal{G}(\Omega, N)$

Der Ausgangspunkt für die Beschreibung eines diskreten Modells beruht auf der Annahme, dass die Topologie eines Objektes über einen Graph  $\mathcal{G}(\Omega, N)$  approximiert werden kann mit:

- $\Omega$  ist Menge der  $M$  Knoten des Graphen;  $\Omega = \{1, 2, \dots, \alpha, \dots, M\}$
- $N$  bildet  $\Omega$  auf eine Untermenge von  $\Omega$  ab, mit

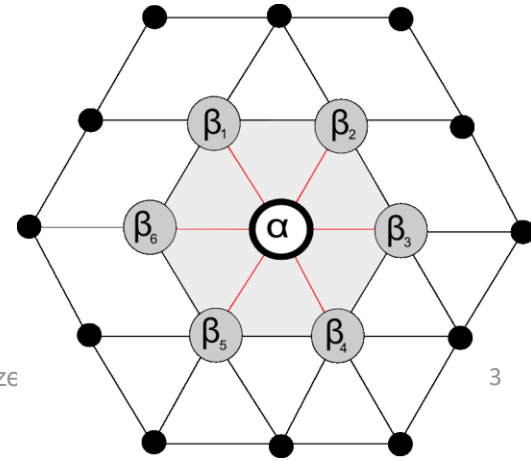
$$\{\beta \in N(\alpha)\} \Leftrightarrow \{\beta \text{ kann von } \alpha \text{ in } s(\alpha) \text{ Schritten erreicht werden}\}$$

mit  $s(\alpha) > 0$  (in der Praxis  $s(\alpha) = 1$ )



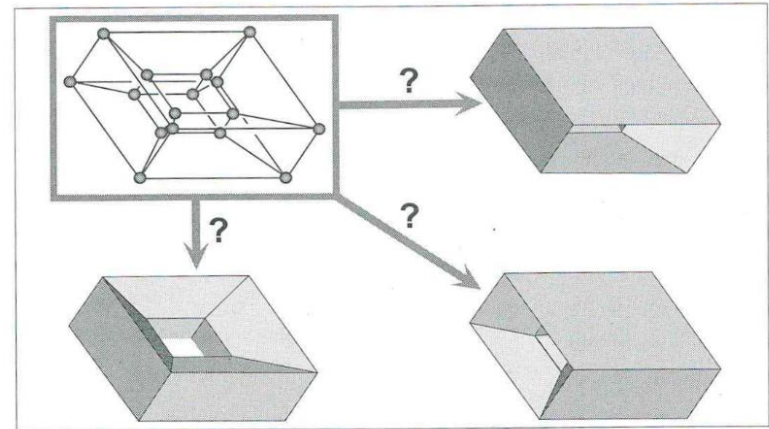
# Diskretes topologisches Modell $\mathcal{G}(\Omega, N)$

- $\mathcal{G}(\Omega, N)$  ist symmetrisch mit
 
$$\beta \in N(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in N(\beta)$$
 ...  $\alpha$  und  $\beta$  sind „nah“ zueinander ...
- $N(\alpha)$  wird als „Nachbarschaft von  $\alpha$ “ bezeichnet und beinhaltet sowohl den Knoten  $\alpha$  und die  $\alpha$  umgebenden Knoten
 
$$N(\alpha) = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots\}$$
- Das „Orbit“  $N^0(\alpha)$  von  $\alpha$ :
 
$$N^0(\alpha) = N(\alpha) - \{\alpha\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$$



# Topologische Mehrdeutigkeit

- $\mathcal{G}(\Omega, N)$  approximiert nur die Topologie eines realen Objektes.
- Nachbarschaftsoperator  $N(\alpha)$  kann bezüglich eines Volumenkörpers verschiedentlich interpretiert werden  $\Rightarrow$  **topologische Mehrdeutigkeit**
- $N(\alpha)$  ist unzureichend für die eindeutige Beschreibung des Objektes.
- Topologische Beschreibung von zellularen Zerlegungen dient zur Auflösung der Mehrdeutigkeit

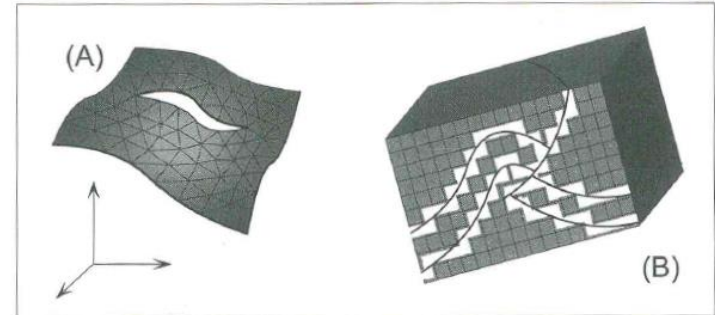


**Figure 1.4** An example of topologically ambiguous object defined by nodes connectivities only.

## Diskontinuitäten zwischen Knoten

Wenn zwischen zwei benachbarten Knoten  $\alpha$  und  $\beta$  das Modell eine „Diskontinuität“ aufweist, kann dies realisiert werden, indem die topologische Verbindung (Kante in Graph) entfernt wird:

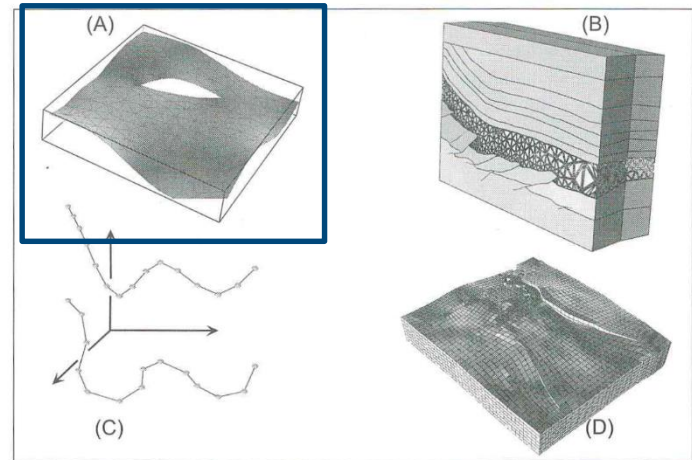
$$\beta \neq N(\alpha) \text{ und } \alpha \neq N(\beta)$$



**Figure 1.6** Discontinuities are introduced in the graph  $G(\Omega, N)$  by removing some edges from the networks (A) and (B). In the grid (B), all the edges intersected by geological surfaces (horizons and faults) have been removed.

## Beispiele für diskreten Modelle

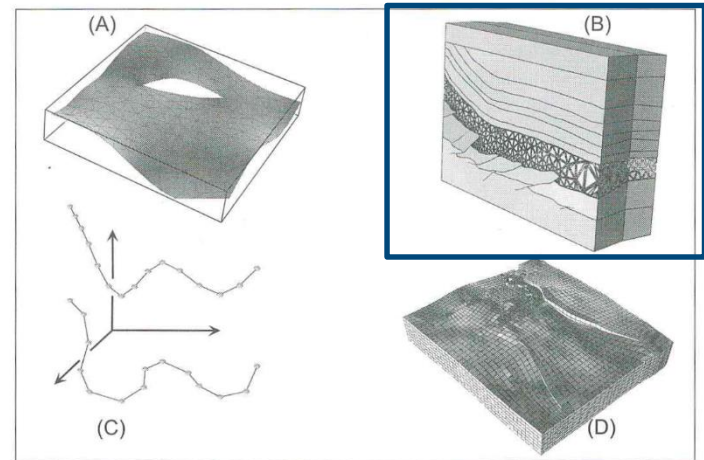
- Ein geologischer Horizont oder eine Störung, repräsentiert als Menge benachbarter Dreiecke



**Figure 1.5** Examples of objects approximated by discrete model: (A) Faulted triangulated geological surface. (B) Set of adjacent tetrahedra filling a geological layer. (C) Polygonal curves. (D) Faulted curvilinear grid filling a geological layer.

## Beispiele für diskreten Modelle

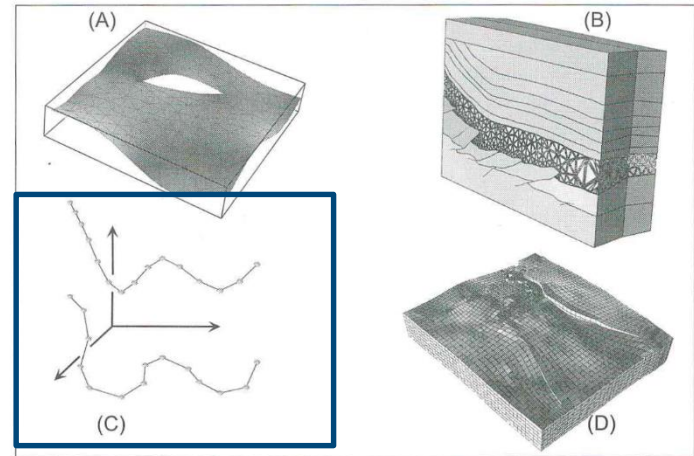
- Ein geologischer Horizont oder eine Störung, repräsentiert als Menge benachbarter Dreiecke
- Ein geologischer Volumenkörper diskretisiert über Menge an benachbarten Tetraedern



**Figure 1.5** Examples of objects approximated by discrete model: (A) Faulted triangulated geological surface. (B) Set of adjacent tetrahedra filling a geological layer. (C) Polygonal curves. (D) Faulted curvilinear grid filling a geological layer.

## Beispiele für diskreten Modelle

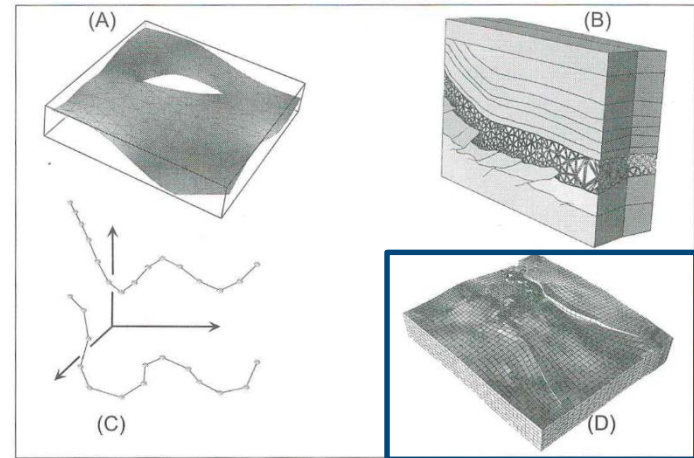
- Ein geologischer Horizont oder eine Störung, repräsentiert als Menge benachbarter Dreiecke
- Ein geologischer Volumenkörper diskretisiert über Menge an benachbarten Tetraedern
- Ein geologischer Schnitt über Polylinien



**Figure 1.5** Examples of objects approximated by discrete model: (A) Faulted triangulated geological surface. (B) Set of adjacent tetrahedra filling a geological layer. (C) Polygonal curves. (D) Faulted curvilinear grid filling a geological layer.

## Beispiele für diskreten Modelle

- Ein geologischer Horizont oder eine Störung, repräsentiert als Menge benachbarter Dreiecke
- Ein geologischer Volumenkörper diskretisiert über Menge an benachbarten Tetraedern
- Ein geologischer Schnitt über Polylinien
- Geologische Schichten über reguläre Gitter



**Figure 1.5** Examples of objects approximated by discrete model: (A) Faulted triangulated geological surface. (B) Set of adjacent tetrahedra filling a geological layer. (C) Polygonal curves. (D) Faulted curvilinear grid filling a geological layer.

## Diskretes topologisches Modell $\mathcal{M}^n(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C})$

Physikalische Eigenschaften (inkl. Geometrie ) sind im diskreten Modell  $\mathcal{G}(\Omega, N)$  noch nicht berücksichtigt.

Diese Eigenschaften können als Serien von numerischen Funktionen, den Komponenten von  $\varphi$ , die auf den Knoten von  $\mathcal{G}(\Omega, N)$  definiert sind, modelliert werden:

$$\varphi(\alpha) = \{\varphi^1(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^v(\alpha), \dots, \varphi^n(\alpha)\} \forall \alpha \in \Omega$$

## Diskretes topologisches Modell $\mathcal{M}^n(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C})$

In der Praxis beschreiben 3 Komponenten von  $\varphi(\alpha)$ , bezeichnet als  $\{\varphi^x(\alpha), \varphi^y(\alpha), \varphi^z(\alpha)\}$ , die Position des Knoten  $\alpha$  im  $\mathbb{R}^3$ .

Die anderen Komponenten entsprechen den physikalischen Eigenschaften.

## Diskretes topologisches Modell $\mathcal{M}^n(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C})$

Die Beschreibung eines topologisches Modell  $\mathcal{M}^n(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C})$  umfasst das Tripel aus

- dem Graph  $\mathcal{G}(\Omega, N)$ ,
- den Funktionen  $\varphi$ , sowie
- einer Menge von „Constraints“  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots\}$ :

$$\mathcal{M}^n(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C}) \equiv \{\mathcal{G}(\Omega, N), \varphi, \mathcal{C}\}$$

## Constraints $\mathcal{C}$

Die Menge der Constraints  $\mathcal{C}$  lässt sich in drei Untermengen

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\cong} \cup \mathcal{C}^{\doteq} \cup \mathcal{C}^{>}$$

Jeder Constraint  $c \in \mathcal{C}$  wird als linear angenommen und entspricht einer von drei Formalisierungen mit den Koeffizienten  $\{A_c^v(\alpha)\}$  und  $b_c$ :

- $\mathcal{C}^{\cong}$ : „soft“ Constraint, Gleichheit muss im Sinne von „least squares“ berücksichtigt werden
- $\mathcal{C}^{\doteq}$ : „hard“ Constraint, Gleichheit muss exakt berücksichtigt werden
- $\mathcal{C}^{>}$ : „hard“ Constraint, Ungleichheit muss exakt berücksichtigt werden

## Constraints $\mathcal{C}$

$$\{c \in \mathcal{C}^{\cong} \text{ erfüllt}\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\nu} A_c^{\nu}(\alpha) \cdot \varphi^{\nu}(\alpha) \cong b_c$$

$$\{c \in \mathcal{C}^{=} \text{ erfüllt}\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\nu} A_c^{\nu}(\alpha) \cdot \varphi^{\nu}(\alpha) = b_c$$

$$\{c \in \mathcal{C}^{>} \text{ erfüllt}\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\nu} A_c^{\nu}(\alpha) \cdot \varphi^{\nu}(\alpha) > b_c$$

## Cross und Simple Constraints

Sei  $\{c \in \mathcal{C}^\infty \text{ erfüllt}\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_v A_c^v(\alpha) \cdot \varphi^v(\alpha) \bowtie b_c$

Mit:  $\bowtie \in \{\cong, =, >\}$

Abhängig davon, wie die Koeffizienten  $\{A_c^v(\alpha)\}$ , die zu  $c$  zugeordnet werden, definiert sind, wird zwischen „cross“ und „simple“ Constraints unterschieden.

# Simple Constraints

Seien die Koeffizienten  $\{A_c^v(\alpha)\}$  wie folgt definiert:

$$\exists v_c : A_c^v(\alpha) = 0 \forall \begin{cases} v \neq v_c \\ & \& \\ \alpha \in \Omega \end{cases}$$

Dann ist  $c$  ein so genannter „simple“ Constraint.

$\Rightarrow \{c \in \mathcal{C}^{\infty} \text{ erfüllt}\} \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_v A_c^v(\alpha) \cdot \varphi^v(\alpha) \propto b_c$  bezieht sich nur auf eine Komponente  $\varphi^{v_c}$  von  $\varphi$ .

## Cross Constraints

Seien die Koeffizienten  $\{A_c^v(\alpha)\}$  wie folgt definiert:

$$\exists \left\{ \begin{array}{l} v_1 \neq v_2 \\ \alpha_1 \in \Omega \\ \alpha_2 \in \Omega \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} A_c^{v_1}(\alpha_1) \neq 0 \\ A_c^{v_2}(\alpha_2) \neq 0 \end{array} \right.$$

Dann ist  $c$  ein so genannter „cross“ Constraint.

$\Rightarrow c$  verknüpfte mindestens zwei Komponenten  $\varphi^{v_1}$  und  $\varphi^{v_2}$  aus  $\varphi$ .

## Beispiel für Constraints I

In der Praxis, werden die Koeffizienten  $\{A_c^v(\alpha)\}$  und  $b_c$  als Funktionen der verfügbaren Daten bestimmt.

Sei  $\varphi^\eta(\alpha_0)$  gleich einem gegebenen Wert  $\phi_0^\eta$  am Knoten  $\alpha_0$  kann diese Information wie folgt in einen Constraint  $c \in \mathcal{C}^\cong$  oder  $c \in \mathcal{C}^=$  umgesetzt werden:

$$\left| \begin{array}{l} A_c^v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha = \alpha_0 \ \& \ v = \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ b_c = \phi_0^\eta \end{array} \right.$$

## Beispiel für Constraints II

Sei der Gradient von  $\varphi^\eta$  gleich einem gegebenen Wert  $\Delta^\eta(\alpha_0, \alpha_1)$  zwischen den Knoten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  mit  $\varphi^\eta(\alpha_0) - \varphi^\eta(\alpha_1) = \Delta^\eta(\alpha_0, \alpha_1)$ ,

kann diese Information wie folgt in einen Constraint  $c \in \mathcal{C}^\cong$  oder  $c \in \mathcal{C}^=$  umgesetzt werden:

$$\left| \begin{array}{l} A_c^v(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \alpha = \alpha_0 \ \& \ v = \eta \\ -1 \text{ wenn } \alpha = \alpha_1 \ \& \ v = \eta \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \\ b_c = \Delta^\eta(\alpha_0, \alpha_1) \end{array} \right.$$

## Beispiel für Constraints III

Gegeben sein ein Knoten  $\alpha_0$  mit  $\{\varphi^x(\alpha_0), \varphi^y(\alpha_0), \varphi^z(\alpha_0)\}$ . Dieser soll auf einer Ebene  $\mathcal{P}(p, n)$  liegen, mit Ebenen-Punkt  $p = (p^x, p^y, p^z)$  und Normalenvektor  $n = (n^x, n^y, n^z)$ . Dann gilt

$$\varphi^x(\alpha_0) \cdot n^x + \varphi^y(\alpha_0) \cdot n^y + \varphi^z(\alpha_0) \cdot n^z = p^x \cdot n^x + p^y \cdot n^y + p^z \cdot n^z$$

kann diese Information wie folgt in einen Constraint  $c \in \mathcal{C}^{\cong}$  oder  $c \in \mathcal{C}^=$  umgesetzt werden:

## Beispiel für Constraints III

$$\left| \begin{array}{l} A_c^v(\alpha) = \begin{cases} n^x & \text{wenn } \alpha = \alpha_0 \ \& \ v = x \\ n^y & \text{wenn } \alpha = \alpha_0 \ \& \ v = y \\ n^z & \text{wenn } \alpha = \alpha_0 \ \& \ v = z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ b_c = p^x \cdot n^x + p^y \cdot n^y + p^z \cdot n^z \end{array} \right.$$

Es handelt in diesem Fall um einen „cross“ Constraint.

## Beispiel für Constraints IV

Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten  $\{\varphi^1(\alpha_0), \varphi^2(\alpha_0), \dots, \varphi^n(\alpha_0)\}$  dass Knoten  $\alpha_0$  zu einer lithologischen Fazies  $F_1, \dots, F_n$  mit

$$0 \leq \varphi^v \leq 1, \sum_{v=1}^n \varphi^v(\alpha_0) = 1.$$

Dann kann diese Information wie folgt in einen „cross“ Constraint  $c \in \mathcal{C}^{\cong}$  oder  $c \in \mathcal{C}^=$  umgesetzt werden:

$$\left| \begin{array}{l} A_c^v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha = \alpha_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ b_c = 1 \end{array} \right.$$

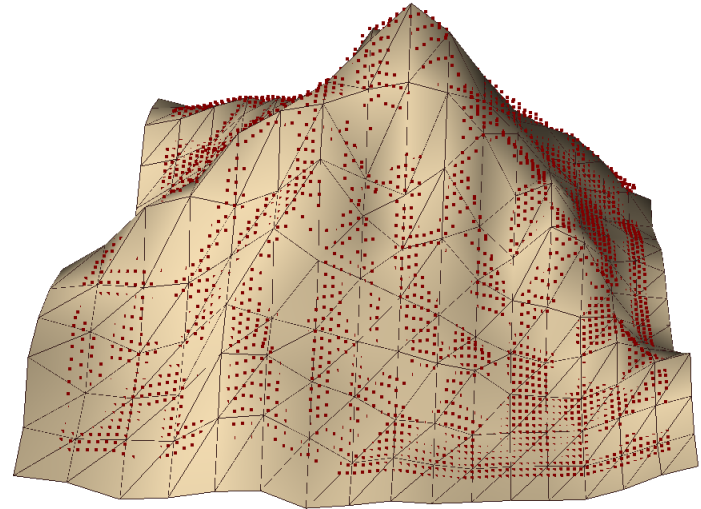
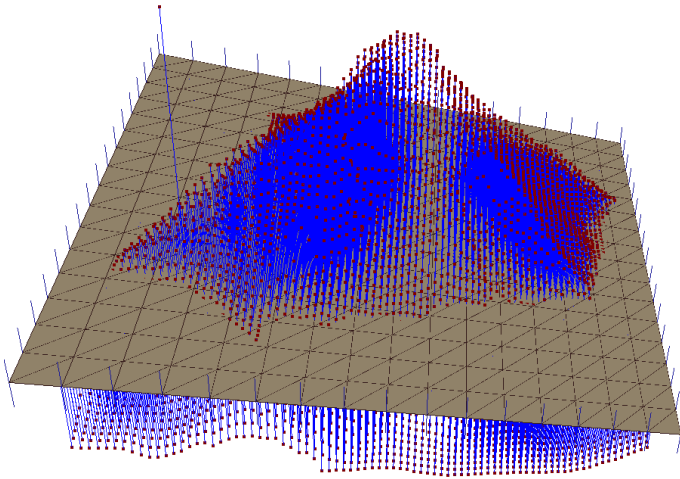
## Take-home questions:

1. Warum wird bei der Beschreibung von Constraints auf die Definition von „soften“ Constraints bezüglich Ungleichheit verzichtet?
2. Wie lassen sich die bekannten Koordinaten für einen Knoten durch einen Constraint ausdrücken.
3. Ein gegebener Datenpunkt  $(\vec{p}, \phi(\vec{p}))$  entspricht keinem gegebenen

$$\text{Knoten mit } \forall \alpha \in \Omega: \begin{cases} \varphi^x(\alpha) \neq p^x \\ \varphi^y(\alpha) \neq p^y \\ \varphi^z(\alpha) \neq p^z \end{cases}$$

Wie könnte er als Constraint ausgedrückt werden.

## Discrete Smooth Interpolation (DSI)



## Rauheit einer Funktion $\varphi$

Konzeptionell ist jede Funktion  $\varphi^\nu$  „glatt“, wenn  $\varphi^\nu(\beta)$  „nah“ an  $\varphi^\nu(\alpha)$  für alle  $\beta \in N(\alpha)$ .

Die Glattheit (*smoothness*) oder Rauheit (*roughness*) einer Funktion kann über die 2. Ableitung gemessen werden (Repräsentation der „Biegunensenergie“, siehe Theorie zu Splines)

$$\text{lokal an Punkt } x: \tilde{R}(\varphi|x) = \left| \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right|^2$$

$$\text{global: } \tilde{R}(\varphi) = \int_D \mu(x) (\varphi|x) dx$$

mit einer lokalen „Steifigkeit“  $\mu(x) > 0, \forall x \in D$ .

## Lokale Rauheit $\tilde{R}(\varphi|x)$ von $\varphi$

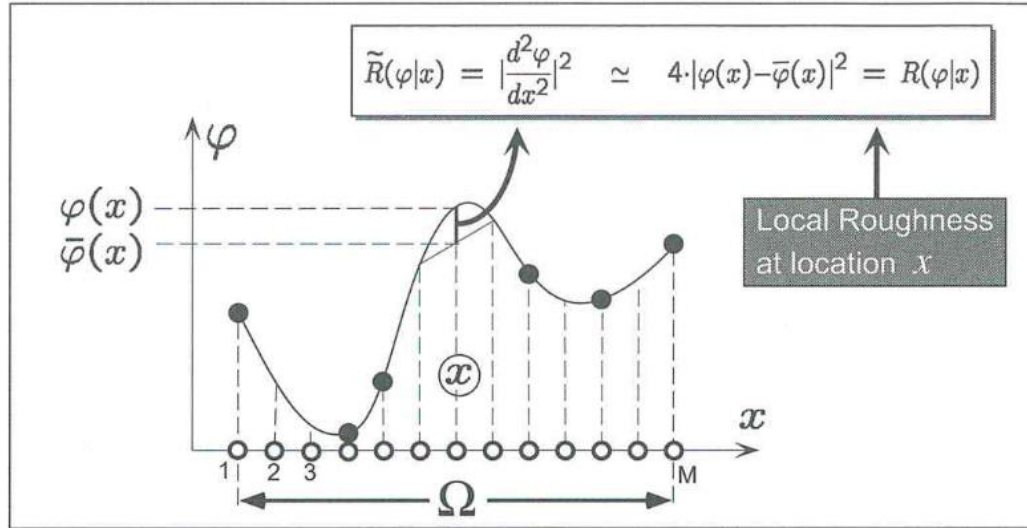
Sei

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x-1) + \varphi(x+1)}{2},$$

dann lässt sich  $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$  über finite Differenzen approximieren mit

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cong 2 \cdot \{\bar{\varphi}(x) - \varphi(x)\} = \{1 \cdot \varphi(x-1) + 1 \cdot \varphi(x+1)\} - 2\varphi(x).$$

# Lokale Rauheit $\tilde{R}(\varphi|x)$ von $\varphi$



**Figure 1.8** Local roughness  $\tilde{R}(\varphi|x)$  of spline curve  $\varphi(x)$  at node  $x$  is proportional to square of length of segment  $|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)|$ .

## Lokale Rauheit $\tilde{R}(\varphi|x)$ von $\varphi$

Für jedes  $\alpha \in \Omega$  lässt sich die lokale Rauheit  $\tilde{R}(\varphi|\alpha)$  über

$$\tilde{R}(\varphi|\alpha) \cong \left| \sum_{\beta \in N(\alpha)} v(\alpha, \beta) \cdot \varphi(\beta) \right|$$

ausdrücken mit z.B.

$$v(\alpha, \beta)^* = \begin{cases} 1, & \forall \beta \in N^0(\alpha) \\ -2, & \beta = \alpha \end{cases}.$$

## Globale Rauheit $\tilde{R}(\varphi)$ von $\varphi$

Sei

$$R(\varphi) = \sum_{\alpha \in \Omega} \mu(\alpha) \cdot R(\varphi|\alpha)$$

mit

$$R(\varphi|\alpha) = \left| \sum_{\beta \in N(\alpha)} v(\alpha, \beta) \cdot \varphi(\beta) \right|^2$$

Dann approximiert  $R(\varphi)$  die globale Rauheit  $\tilde{R}(\varphi)$

$$R(\varphi) \cong \tilde{R}(\varphi).$$

## Discrete Smooth Interpolation (DSI)

Die Minimierung von  $R(\varphi)$  oder  $\tilde{R}(\varphi)$  für zu äquivalenten Ergebnissen.

Diese Erkenntnis stellt die Ausgangsüberlegung zu DSI dar.

## Discrete Smooth Interpolation (DSI)

Gegeben sei ein diskretes Modell  $\mathcal{M}^1(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C})$  mit einer Eigenschaft  $\varphi = \varphi_1$ .

$\Omega$  lässt sich in zwei Untermengen  $L$  und  $I$  mit  $\Omega = L \cup I$  aufteilen:

- $L$  umfasst alle Knoten  $l \in \Omega$  an denen  $\varphi(l)$  bekannt ist  $\Rightarrow$  „Control-Nodes“
- $I$  umfasst alle Knoten  $i \in \Omega$  mit unbekanntem  $\varphi(i)$

$L$  ist verknüpft mit einer Untermenge  $\mathcal{C}^L$  an „hard“ Constraints  $\mathcal{C}^L$ :

$$l \in L \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{C}^L: \left| \begin{array}{l} A_c(\alpha) = \begin{cases} 1, \alpha = l \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \\ b_c = \text{bekannter Wert an } \varphi(l) \end{array} \right.$$

## Discrete Smooth Interpolation (DSI)

Das Ziel ist die Bestimmung von  $\{\varphi(i): i \in I\}$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\varphi$  ist „so glatt wie möglich“ auf  $\mathcal{G}(\Omega, N)$ ;
- Die Kontrollwerte  $\{\varphi(l): l \in L\}$  werden exakt abgebildet;
- Jeder Constraint  $c \in \mathcal{C}^{\cong}$  wird „so gut wie möglich“ abgebildet;

## Das DSI Problem

Um dieses Ziel zu erreichen, kann man die lokale Rauheit  $R(\varphi|\alpha)$  von  $\varphi$  in der Nachbarschaft  $N(\alpha)$  UND die Abweichung\*  $\rho(\varphi, c)$  für jeden Constraint  $c \in \mathcal{C} \cong$  wie folgt bestimmen:

$$R(\varphi|\alpha) = \left| \sum_{\beta \in N(\alpha)} v(\alpha, \beta) \cdot \varphi(\beta) \right|^2$$

$$\rho(\varphi, c) = \left| \sum_{\alpha \in \Omega} A_c(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) - b_c \right|^2$$

## Das DSI Problem

Gesucht ist Funktion  $\hat{\varphi}$ , welche das „generalisierte Rauheitskriterium“  $R^*(\hat{\varphi})$  mit

$$R^*(\hat{\varphi}) = \sum_{\alpha \in \Omega} \mu(\alpha) \cdot R(\hat{\varphi}|\alpha) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \sum_{c \in \mathcal{C}^{\cong}} \varpi_c \cdot \rho(\varphi|c)$$

minimiert.

- $\mu(\alpha) > 0$  gegebene „Steifigkeit“ zur Wichtung der lokalen Rauheit  $R(\hat{\varphi}|\alpha)$
- $\{\varpi_c\}$  positive „Zuverlässigkeitsfaktoren“ zur relativen Gewichtung der einzelnen Constraints untereinander
- $(\phi \cdot \varpi)$  „Ausgleichsfaktor“ zwischen Rauheit und Constraints

## Das DSI Problem

Die Funktion  $\hat{\varphi}$ , welche  $R^*(\hat{\varphi})$  minimiert, existiert und ist eindeutig, wenn:

1.  $L \neq \emptyset$
2. 
$$\begin{cases} v(\alpha, \beta) > 0, \forall \beta \in N^0(\alpha) \\ v(\alpha, \alpha) = -\sum_{\beta \in N^0(\alpha)} v(\alpha, \beta) \end{cases}$$
3. 
$$\begin{cases} \mu(\alpha) > 0, \forall \alpha \in \Omega \\ \varpi_c > 0, \forall c \end{cases}$$

Bedingungen 1-3 sind ausreichend (*sufficient*), um Existenz und Eindeutigkeit zu gewährleisten, aber nicht unbedingt notwendig.

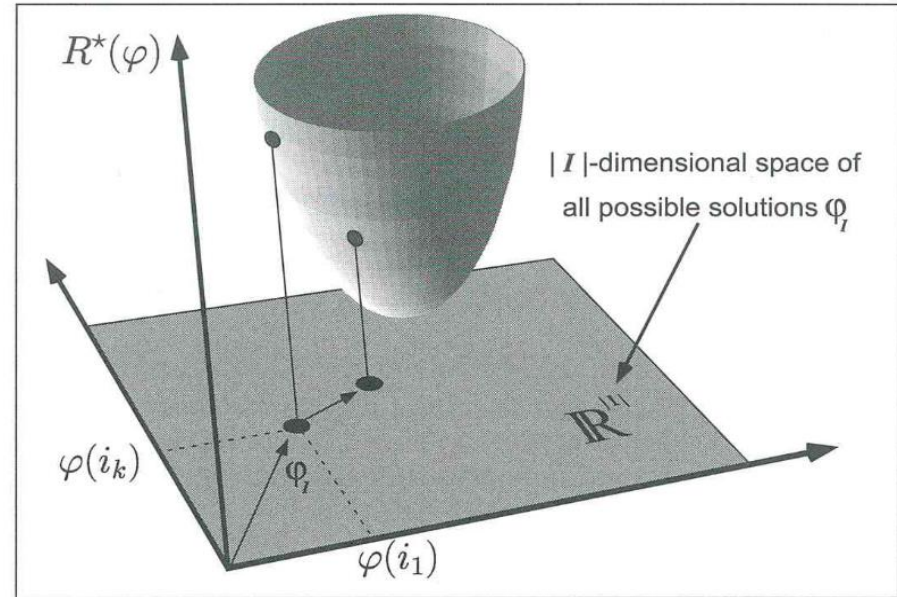
## Die DSI Lösung

Sei  $\varphi_I$  ein Spaltenvektor der Länge  $|I|^*$ , die Vektorelemente entsprechen den noch unbekanntenen Werten  $\{\varphi(i): i \in I\}$  mit

$$\varphi_I = \begin{bmatrix} \varphi(i_1) \\ \varphi(i_2) \\ \vdots \\ \varphi(i_{|I|}) \end{bmatrix}.$$

## Die DSI Lösung - $R^*(\varphi)$

Das „generalisierte Rauheitskriterium“  $R^*(\varphi)$  ist dabei eine positive, quadratische Funktion von  $|I|$  Variablen  $\{\varphi(i_1), \varphi(i_2), \dots, \varphi(i_{|I|})\}$ , welche über ein Paraboloid im Raum  $\mathbb{R}^{|I|+1}$  repräsentiert werden kann:



**Figure 1.9** Generalized global roughness  $R^*(\varphi)$  is a quadratic function of  $\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(M)\}$ . At each iteration of the DSI algorithm, a subset  $\varphi_I$  of the components of the function  $\varphi$  is updated in such a way that this generalized global roughness decreases.

## Die DSI Lösung

Die Lösung  $\varphi$  des DSI Problems entspricht dabei dem

Minimum der Funktion  $R^*(\varphi)$ ,

welches über folgendes Optimalitätskriterium charakterisiert werden kann:

$$\frac{\partial R^*(\varphi)}{\partial \varphi(i_1)} = \frac{\partial R^*(\varphi)}{\partial \varphi(i_2)} = \dots = \frac{\partial R^*(\varphi)}{\partial \varphi(i_{|I|})} = 0$$

## Die DSI Lösung

Für jeden Knoten  $\alpha \in \Omega$  kann das Optimalitätskriterium durch die so genannte „lokale DSI-Gleichung“ iterativ erfüllt werden:

$$\varphi^i(\alpha) = - \frac{G(\alpha|\varphi^{i-1}) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \Gamma(\alpha|\varphi^{i-1})}{g(\alpha) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \gamma(\alpha)} \quad \forall \alpha, i > 0$$

## Die DSI Lösung

- Über diese Gleichung kann ein  $\varphi^i(\alpha)$  durch Adaption einer bekannten Lösung für  $\varphi^{i-1}(\alpha)$  bestimmt werden
- $G(\alpha|\varphi^{i-1})$  und  $g(\alpha)$  beschreiben den Einfluss der globalen Rauheit
  - Beide Termine hängen ab von:  $\mu(\beta), v(\beta, \alpha) \forall \beta \in N(\alpha)$
- $\Gamma(\alpha|\varphi^{i-1})$  und  $\gamma(\alpha)$  bewirken die Minimierung der Abweichung von den Constraints
  - Beide Termine hängen ab von:  $A_c(\alpha), A_c(\beta), b_c \forall \beta \in \Omega, c \in \mathcal{C}$
- $G(\alpha|\varphi^{i-1})$  und  $\Gamma(\alpha|\varphi^{i-1})$  hängen zusätzlich vom aktuell bekannten  $\varphi^{i-1}$  ab
- $(\phi \cdot \varpi)$  Ausgleichfaktor zwischen Rauheit und Constraints

## Die generalisierte DSI Lösung

In der Praxis ist  $\varphi(\alpha)$  selten skalar, sondern umfasst mehrere Komponenten, welche über „Cross-Constraints“ verknüpft sein können:

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} \varphi^1(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^v(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^n(\alpha) \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \Omega$$

Lokale Rauheit  $R(\varphi|\alpha)$  und die Abweichung  $\rho(\varphi, c)$  müssen diesbezüglich modifiziert werden:

## Die generalisierte DSI Lösung

$$R(\varphi|\alpha) = \sum_{\nu} r_{\nu} \cdot \left| \sum_{\beta \in N(\alpha)} v^{\nu}(\alpha, \beta) \cdot \varphi^{\nu}(\beta) \right|^2$$

$r_{\nu} > 0$ : relative Gewichtung der Komponenten

$$\rho(\varphi, c) = \left| \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\nu} A_c^{\nu}(\alpha) \cdot \varphi^{\nu}(\alpha) - b_c \right|^2$$

## Die generalisierte DSI Lösung

Die lokale DSI-Gleichung zur Anpassung einer Komponente  $\varphi^v(\alpha)$ :

$$\varphi^v(\alpha) = - \frac{G^v(\alpha|\varphi) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \Gamma^v(\alpha|\varphi)}{g^v(\alpha) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \gamma^v(\alpha)}$$

- Quasi identisch zum Fall mit nur einer Komponente
- $\Gamma^v(\alpha|\varphi)$  muss im Fall von „Cross-Constraints“ angepasst werden, um die beteiligten Komponenten zu berücksichtigen.

# Vorraussetzungen für eine Anwendung von DSI

1. Der Graph  $\mathcal{G}(\Omega, N)$  muss existieren.
    - Triangulierte Fläche.
  2. Die Koeffizienten  $v(\beta, \alpha), \beta \in N(\alpha), \forall \alpha \in \Omega$  müssen bekannt sein.
    - Maß zur Bestimmung der Rauheit.
  3. Eine Startlösung  $\varphi^0(\alpha) \forall \alpha \in \Omega$  muss bekannt sein.
    - Mittelwert/Medium-Plane
  4. Eine Menge an Constraints  $\mathcal{C}$  muss für  $\forall \alpha \in \Omega$  und  $\varphi$  gegeben sein.
- ⇒ Das diskrete Modell  $\mathcal{M}(\Omega, N, \varphi^0, \mathcal{C})$  muss **VOR** der Interpolation bekannt sein.

## Die globale DSI Gleichung

DSI lässt sich auch nicht-iterativ anwenden, dabei wird das optimale  $\varphi(\alpha)$  direkt aus dem bekannten Startwert  $\varphi^0(\alpha)$  bestimmt.

Dafür muss ein sehr großes, aber schwach besetztes (*sparse*) Gleichungssystem gelöst werden:

$$[W_{II}^*] \cdot \varphi_I = \psi_I$$

mit  $\psi_I = Q_I^* - [W_{IL}^*] \cdot \varphi_L$

- $n$ : Anzahl der Komponenten von  $\varphi$
- $[W_{II}^*]$ : quadratische, schwach besetzte Matrix der Dimension  $n \cdot |I| \times n \cdot |I|$
- $[W_{IL}^*]$ : schwach besetzte Matrix der Dimension  $n \cdot |I| \times n \cdot |L|$
- $Q_I^*$ : schwach besetzter Vektor der Dimension  $n \cdot |I| \times 1$

## Die globale DSI Gleichung

- Matrix  $[W^*] = \begin{bmatrix} W_{II}^* & W_{IL}^* \\ W_{LI}^* & W_{LL}^* \end{bmatrix}$  ist abhängig von den Koeffizienten  $v^\nu(\beta, \alpha), \beta \in N(\alpha), \forall \alpha \in \Omega$  und  $A_c^\nu(\alpha) \forall \alpha \in \Omega, c \in \mathcal{C}$
- Vektor  $Q^* = \begin{bmatrix} Q_I^* \\ Q_L^* \end{bmatrix}$  ist abhängig von  $A_c(\alpha), b_c \forall \alpha \in \Omega, c \in \mathcal{C}$
- **Die globale DSI-Gleichung führt zum gleichen Ergebnis wie die lokale DSI-Gleichung mit  $i \rightarrow \infty$  Iterationen!**

## Take-home questions:

1. Wie geht der Abstand der Knoten zueinander in das DSI Ergebnis ein?
2. Angenommen, es existieren keine „Controll-Nodes“ ( $L = \emptyset$ ) und es sind keine weiteren Constraints gesetzt. Wie verändert sich das Gleichungssystem für die globale DSI-Gleichung und was bedeutet dies praktisch für das Interpolationsergebnis?

Institut für Geophysik und Geoinformatik

Dr. Peter Menzel

Gustav-Zeuner-Str. 12

09599 Freiberg

Tel. +49(0)3731 39-3815

## Literatur

Mallet, Jean-Laurent (2002) *Geomodelling*. Oxford University Press.

Institut für Geophysik und Geoinformatik

Dr. Peter Menzel

Gustav-Zeuner-Str. 12

09599 Freiberg

Tel. +49(0)3731 39-3815