

# Didaktik der Arithmetik

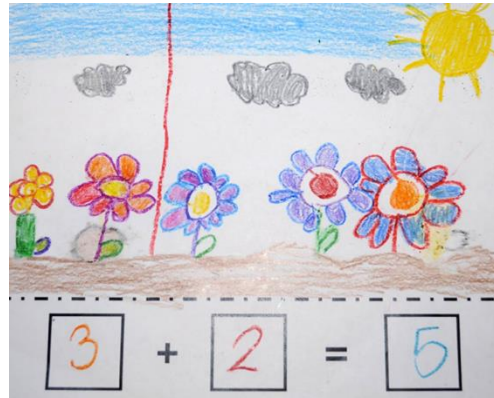
## - Vorlesung Vertiefungsmodul LAGS-GSD-MA-VM1

### 6.1 Grundrechenarten – Grundlage

Grundschuldidaktik Mathematik  
Prof. Dr. phil. Birgit Brandt  
Wintersemester 2024/25



# Grundlagen im Unterricht



Quelle unbekannt

**Addition:**  $4 + 3 = 7$

**Subtraktion:**  $7 - 3 = 4$

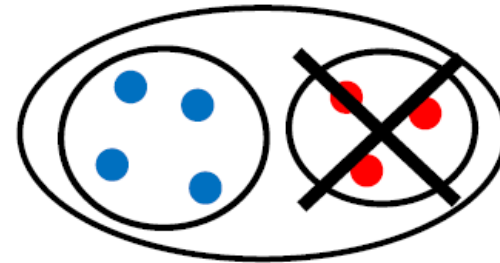
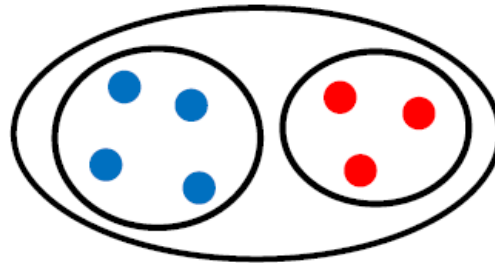
$$A \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

$$B \subseteq C$$

$$\Rightarrow |C \setminus B| = |C| - |B|$$

Kardinal-  
zahl



Zählzahl

1, 2, 3, 4, 5, 6, **7**

6, 5, **4**

Maßzahl

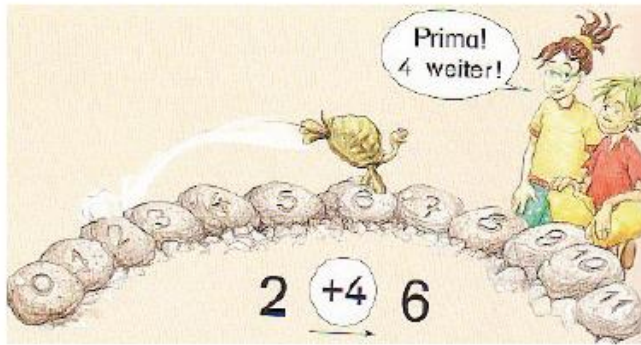


# Addition: Zahlaspekt

- **Addition kardinal:**  
Abzählen der Mengen  
Vollständiges Abzählen oder Weiterzählen

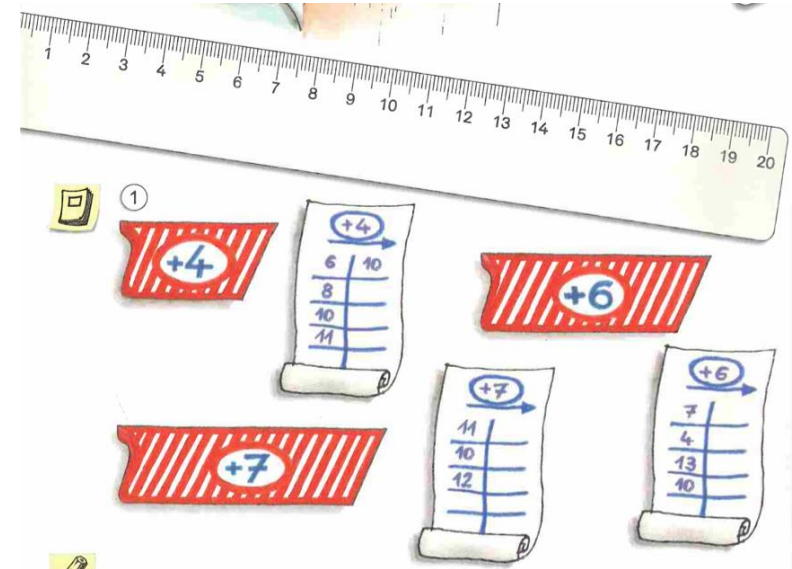
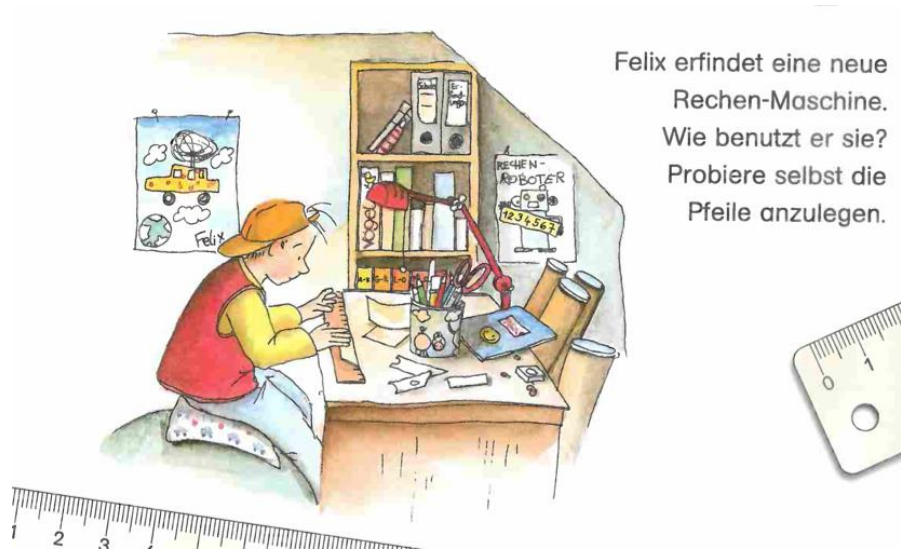


- **Addition ordinal:**  
Die Reihenfolge der Objekte ist entscheidend.  
Weiterziehen auf dem Spielplan.



Quelle unbekannt

# Addition: Zahlaspekte



# Subtraktion: Zahlaspekte I

- **Subtraktion kardinal:**

Teilmengen wegnehmen

Subtraktion mit konkreten Objekten:

Abzählen der Restmenge



- **Subtraktion ordinal:**

Reihenfolge ist entscheidend.

Rückwärtsziehen auf dem Spielplan




<https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSXdn4qW7vQOadpNVShOJWRPHFp1bGBvy2HmzBLBhsT60q40PMB1q&s>

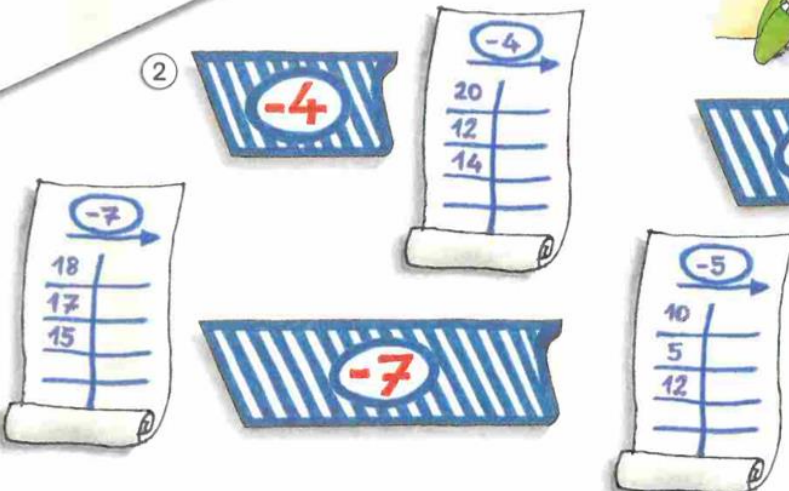
Quelle unbekannt

# Subtraktion: Zahlaspekte II

Welche Idee hat Paula wohl?



②


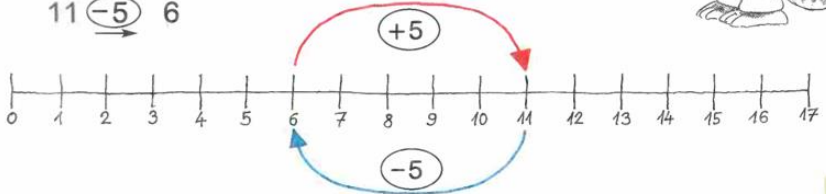


Finde noch mehr Aufgaben.

③ Sprünge vorwärts und rückwärts:

6  $\xrightarrow{+5}$  11

11  $\xrightarrow{-5}$  6

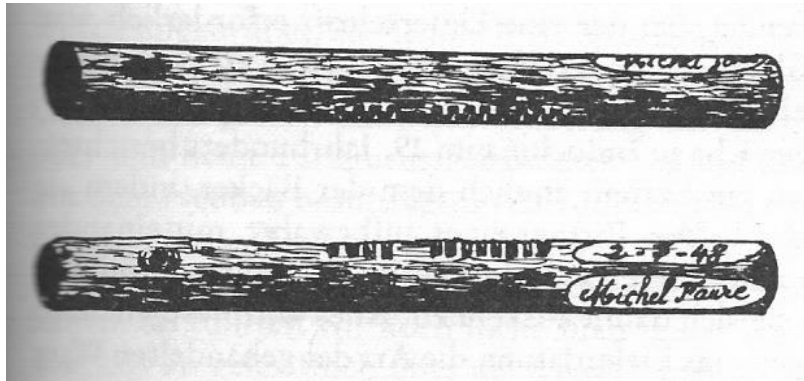
Suche eigene Beispiele.

# Grundlagen: fachliche Perspektive

1. Mengentheoretische Grundlage (kardinal)
2. Peano-Axiom: Rekursiv-ordinal

# Addition als „Wurzel“ der Grundrechenarten

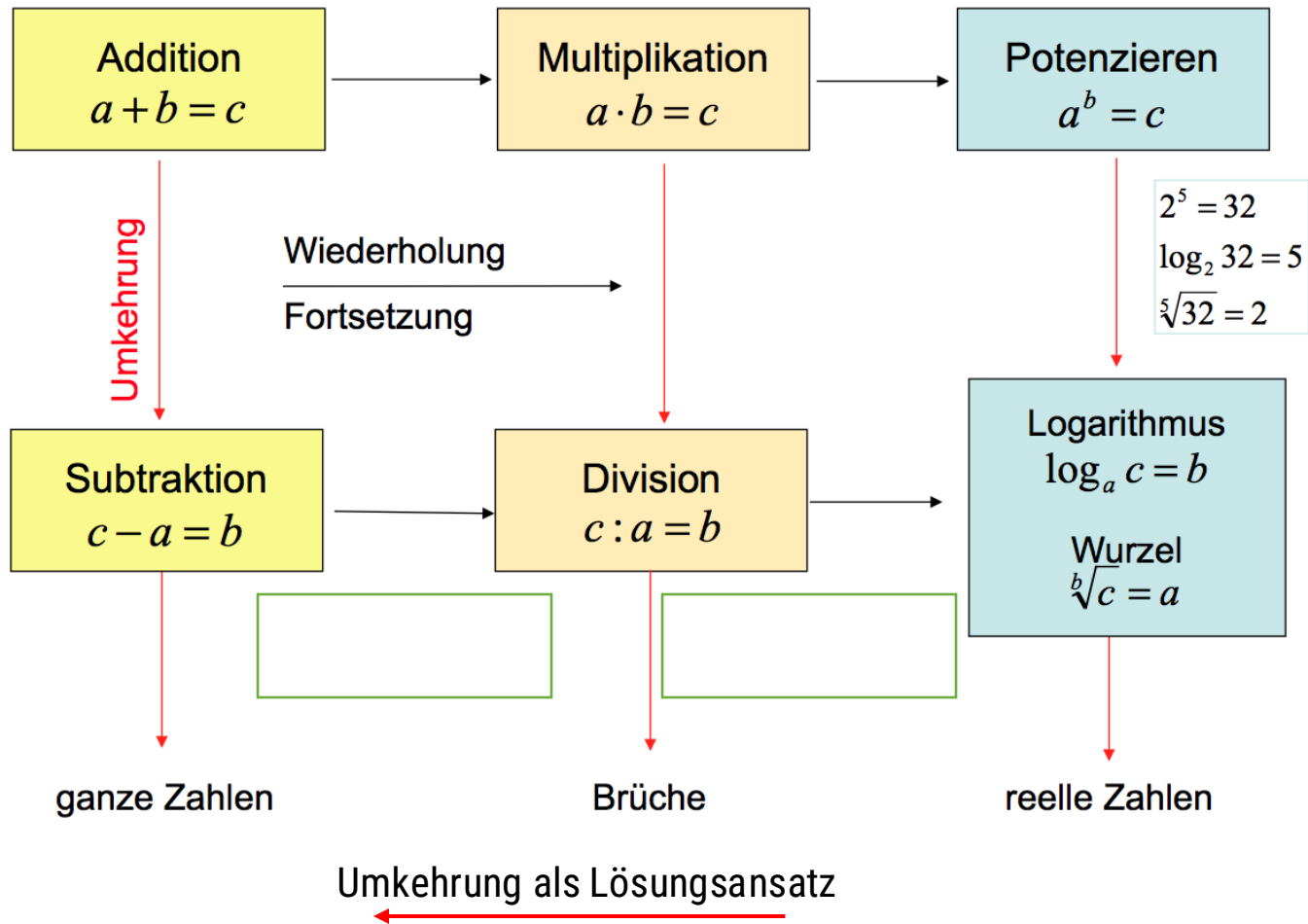
- Mengen zusammenfassen (**kardinal**)  
(auch ohne konkretes Abzählen möglich)



- Kerbholz: beruht auf additiver Grundidee „*und noch einer*“  
(symbolisch als Strichliste festgehalten)

Ifrah, G, 2010

# Zusammenhang der Grundrechenarten



# Grundlage: Mengenlehre I

Teilmenge:  $B \subseteq A$

Beispiel:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad B = \{6, 12\} \subseteq A$$

Schnittmenge:  $A \cap B$

Beispiel:

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ und } B = \{3, 6, 9\}$$
$$A \cap B = \{6\}$$

Vereinigungsmenge:  $A \cup B$

Beispiel:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{3, 6, 9\}$$
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$$

# Grundlage: Mengenlehre II

Differenzmenge:  $A \setminus B$

Beispiel:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad B = \{6, 12\}$$

$$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}$$

Komplementärmenge:  $B'$  ( $B \subseteq A$ )

Beispiel:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad B = \{6, 12\}$$

$$B' = \{2, 4, 8, 10\}$$

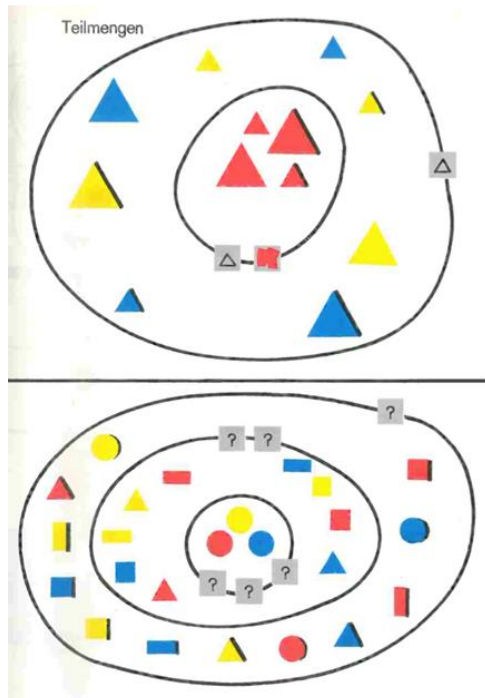
disjunkt:  $A \cap B = \{\} = \emptyset$

Beispiel:

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ und } B = \{5, 10, 15\}$$

# Mengenlehre im Schulbuch I

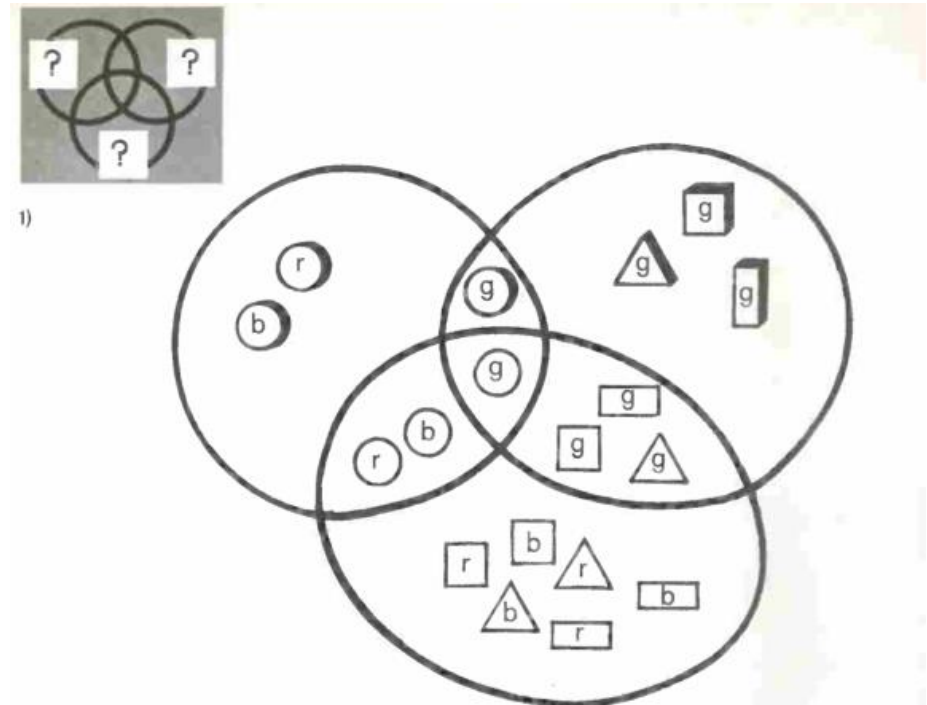
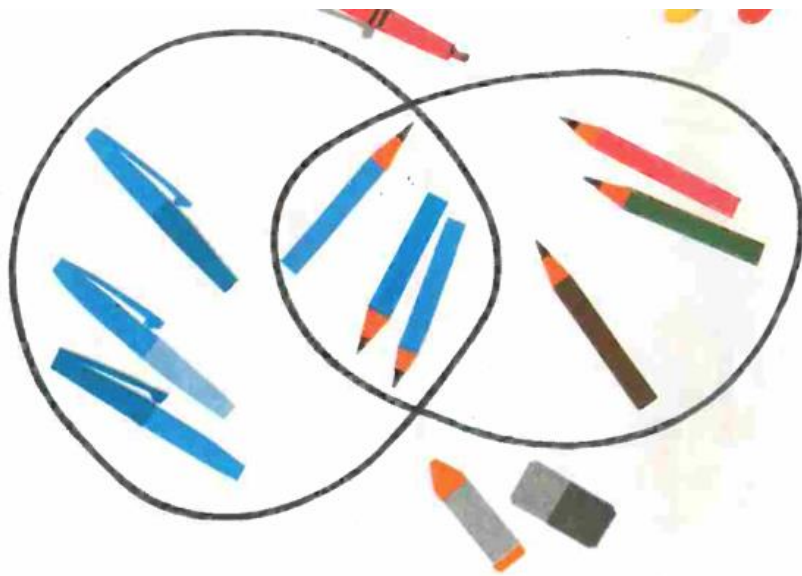
## Beispiele aus: Wir lernen Mathematik 1



Neunzig & Sorger, 1971, S. 8, 19

# Mengenlehre im Schulbuch II

## Beispiele aus: Wir lernen Mathematik 1



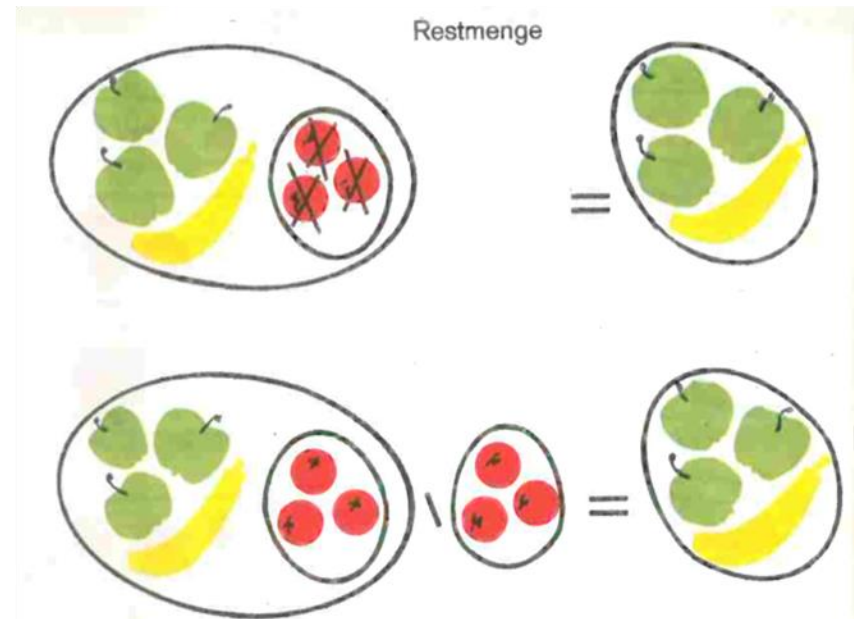
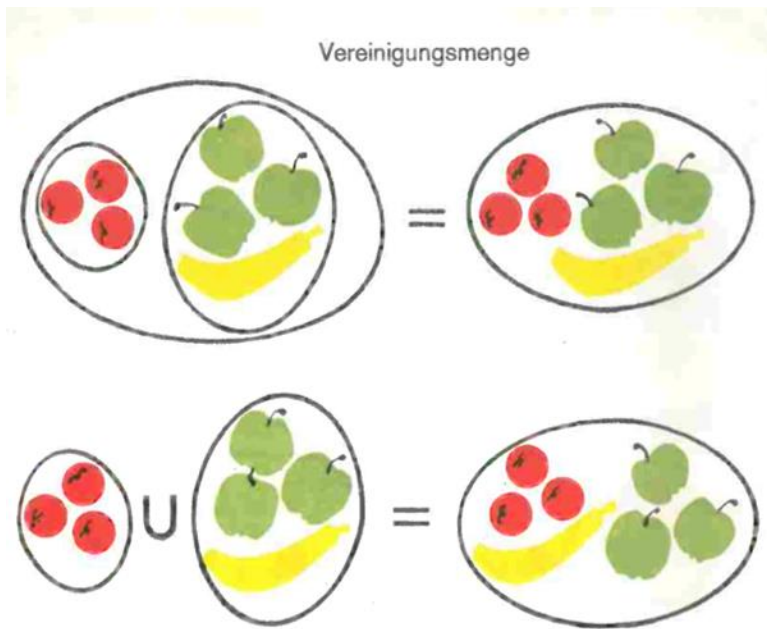
1)

Lege mit deinen Bausteinen nach! Benenne die Mengen in allen Feldern!

Neunzig & Sorger, 1971, S. 34, 102

# Mengenlehre im Schulbuch III

## Beispiele aus: Wir lernen Mathematik 1



Neunzig & Sorger, 1971, S. 62 f.

# Addition: Kardinalzahlprinzip

- Addition über Mengenvereinigung

Sind  $N$  und  $M$  zwei *disjunkte* Mengen, so ist  

$$|N \cup M| = |N| + |M|.$$

$$N = \{2, 4, 6\}, |N| = 3$$

$$M = \{3, 9, 12\}, |M| = 3$$

$$N \cap M = \{\}$$

$$N \cup M = \{2, 3, 4, 6, 9, 12\}$$

$$|N \cup M| = 6$$

$$N = \{2, 4, 6\}, |N| = 3$$

$$X = \{2, 3, 5\}, |X| = 3$$

$$N \cap X = \{2\}$$

$$N \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$|N \cup X| \neq 6$$

# Subtraktion: Kardinalzahlprinzip

- Subtraktion über Komplement / Differenzmenge

Sei  $M$  eine *Teilmenge* von  $N$ , so ist  
 $|N \setminus M| = |N| - |M| = |M'|$ .

$$N = \{2, 4, 6\}, |N| = 3$$

$$M = \{2, 6\}, |M| = 2$$

$$N \setminus M = \{4\}$$

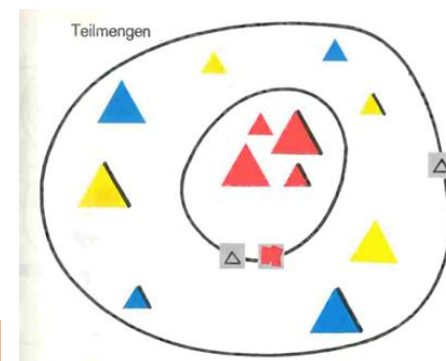
$$|N \setminus M| = 1$$

$$N = \{2, 4, 6\}, |N| = 3$$

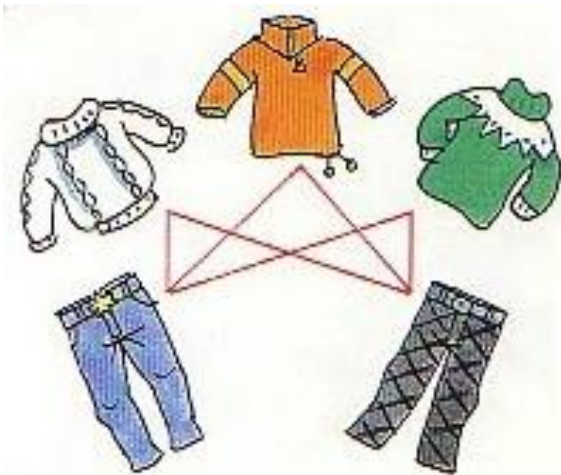
$$X = \{2, 3\}, |X| = 2$$

$$N \setminus X = \{4, 6\}$$

$$|N \setminus X| \neq 1$$



# Multiplikation: Mengentheoretisch (kardinal) I



(wP, bH), (wP, sH)  
(rP, bH), (rP, sH)  
(gP, bH), (gP, sH)

⑤ Lukas darf sich von jedem Teller ein Stück aussuchen.  
Wie viele Möglichkeiten hat er?

S. 87, Nr. 5

	🍏	🍐	🍊	🍌
🥨	🥨 🍏	🥨 🍐		
🥨	🥨 🍏			
🥨				

Quelle unbekannt

# Multiplikation: Mengentheoretisch (kardinal) II

- Multiplikation über kartesisches Produkt:  $\times$ 
  - Menge der geordneten Paare (Tupel)

Sind  $N$  und  $M$  zwei nichtleere Mengen, so ist  
 $|N| \cdot |M| = |N \times M|$ .

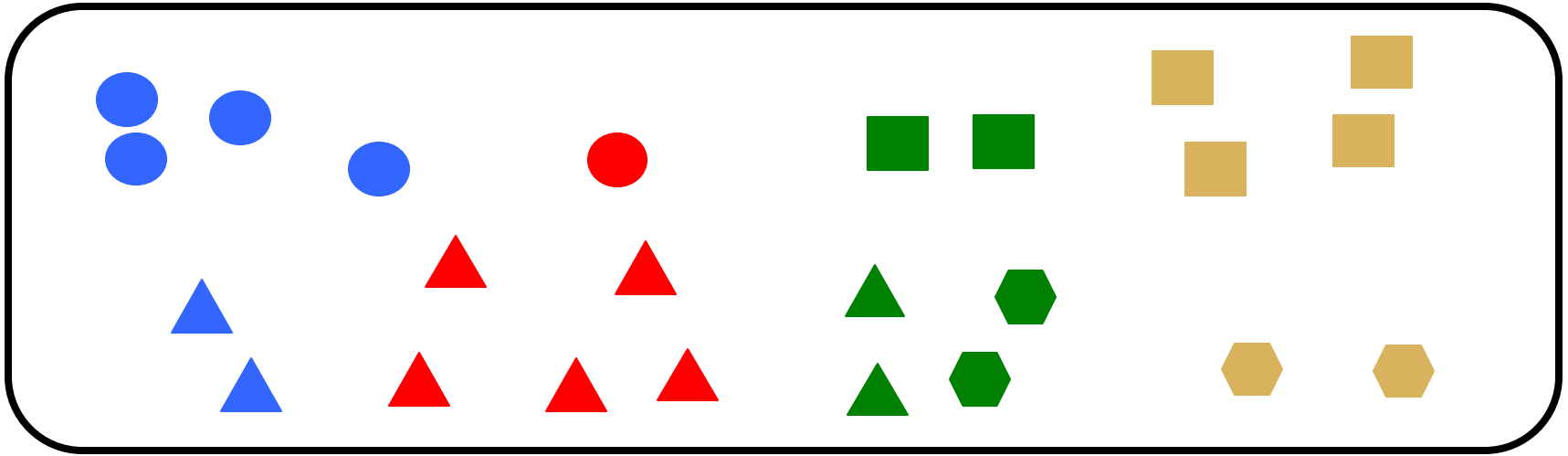
$$N = \{2, 4, 6\}, |N| = 3$$

$$M = \{3, 9, 12\}, |M| = 3$$

$$N \times M = \{(2, 3), (2, 9), (2, 12), (4, 3), (4, 9), (4, 12), (6, 3), (6, 9), (6, 12)\}$$

$$|N| \cdot |M| = 9$$

# Division: Mengentheoretisch (kardinal) I



**disjunkt:** Kreise, Dreiecke, Quadrate, Sechsecke

**gleichmächtig:** quadratisch, rot, grün, gelb, blau

**gleichmächtig und disjunkt:** rot, gelb, grün, blau

# Division: Mengentheoretisch (kardinal) II

## Partition:

Eine Partition (Zerlegung, Klasseneinteilung) einer Menge  $M$  ist eine Menge (Mengenfamilie), deren Elemente nichtleere, disjunkte Teilmengen von  $M$  sind.

Beispiel:

$$M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

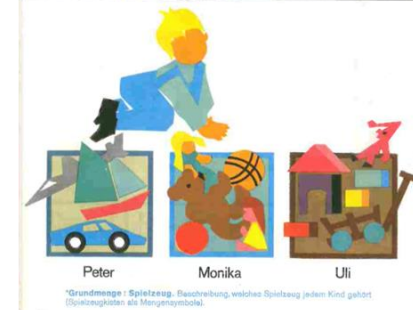
$$P = \{\{2\}, \{4, 6, 8\}, \{10, 12\}\}$$

Gegenbeispiele:

$$M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$Q = \{\{2, 4\}, \{4, 6, 8\}, \{10, 12\}\}$$

$$R = \{\{2, 4\}, \{8\}, \{10, 12\}\}$$



Neunzig & Sorger, 1971, S.

8

# Division: Mengentheoretisch (kardinal) III

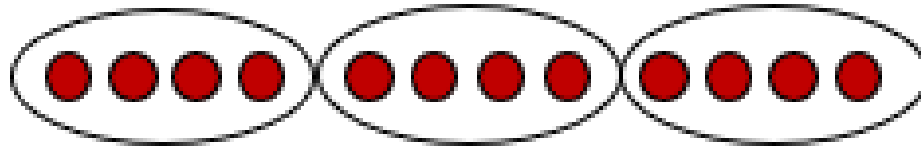
- Partition (Zerlegung) in gleichmächtige Mengen

Ist  $N$  eine Menge mit  $n$  Elementen ( $|N|=n$ ) und  $P = \{M_1, \dots, M_k\}$  eine Partition von  $N$  ( $|P|=k$ ), wobei alle  $M_i$  gleichmächtig sind ( $|M_i|=m$ ), so ist  
 $n:k=m$  bzw.  $n:m=k$

$$N = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, n = |N| = 6$$

$$P = \{\{2, 12\}, \{6, 8\}, \{10, 4\}\} \quad |P| = 3, m = 2$$

# Division: Mengentheoretisch (kardinal) IV



- Elemente-Anzahl der Grundmenge: **12**
- Anzahl der Teilmengen: **3**
- Elemente-Anzahl der Teilmengen: **4**

# Division: Mengentheoretisch (kardinal) V

## ■ Verteilen



Anna verteilt 24 Karten. Wie viele Karten bekommt jedes Kind?

Denken und Rechnen 2, S. 80

Beispiel	Allg. Kennzeichnung
Anna verteilt 24 Karten.	Grundmenge: gegeben
Jedes der drei Kinder soll gleich viele Karten bekommen.	Anzahl der Teilmengen: gegeben
Wie viele Karten bekommt jedes Kind?	<b>Elementanzahl der einzelnen Teilmengen: gesucht</b>

# Division: Mengentheoretisch (kardinal) VI

## ■ Aufteilen



Beispiel	Allg. Kennzeichnung
In der Turnhalle sind 12 Kinder.	Grundmenge: gegeben
Es sollen Vierergruppen gebildet werden.	Elementanzahl der einzelnen Teilmengen: gegeben
Wie viele Vierergruppen können gebildet werden?	<b>Anzahl der Teilmengen: gesucht</b>

# Rekursiv: Addition und Subtraktion

Addition für beliebige  $n, m$

$$n + 0 := n$$

$$n + (m + 1) := (n + m) + 1$$

$$n + (m+1) = (n+1) + m$$

$$\begin{aligned} 9+4 &= (9+3) + 1 \\ &= (9+2) + 1+1 \\ &= (9+1) + 1+1+1 \\ &= (9+0) + 1+1+1+1 \\ &= \mathbf{9} + \mathbf{1+1+1+1} = \mathbf{13} \end{aligned}$$

$$\mathbf{9 + 4 = 10 + 3}$$

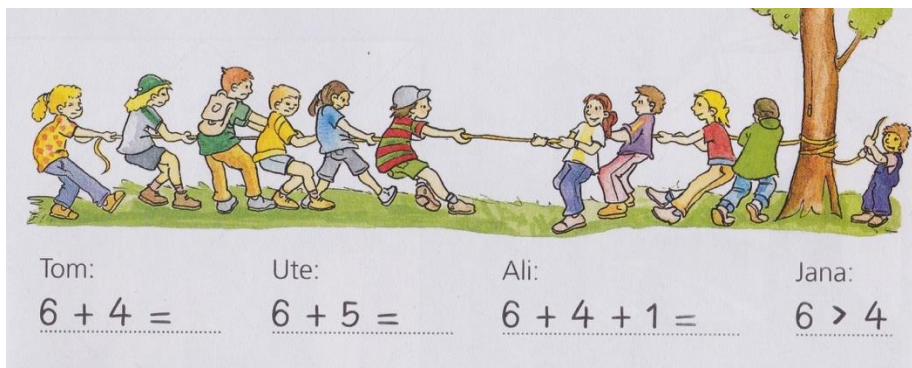
Subtraktion für  $n \geq m$

$$n - 0 := n$$

$$(n + 1) - (m + 1) := (n - m)$$

$$\begin{aligned} 9-4 &= (8+1) - (3+1) \\ &= 8 - 3 \\ &= 7 - 2 \\ &= 6 - 1 \\ &= \mathbf{5-0} = \mathbf{5} \end{aligned}$$

$$\mathbf{9 - 4 = 10 - 5}$$



## Nachbaraufgaben

3 Schöne Päckchen. Setze fort.

$3 - 2$	$7 - 1$	$5 - 3$
$5 - 3$	$8 - 2$	$6 - 4$
$7 - 4$	$9 - 3$	$7 - 5$
$9 - 5$	$10 - 4$	$8 - 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5

$19 - 10$	$12 - 3$	$8 - 0$
$17 - 10$	$13 - 4$	$5 - 0$
$15 - 5$	$14 - 5$	$10 - 0$
$13 - 10$	$16 - 5$	$10 - 10$
$17 - 7$	$17 - 6$	$11 - 11$

## Gleichsinniges Verändern

Quelle unbekannt

# Rekursiv: Multiplikation und Division

## Multiplikation als wiederholte Addition

$$n \cdot 0 := 0$$

$$n \cdot (m + 1) := (n \cdot m) + n$$

$$\begin{aligned} 9 \cdot 4 &= (9 \cdot 3) + 9 \\ &= (9 \cdot 2) + 9 + 9 \\ &= (9 \cdot 1) + 9 + 9 + 9 \\ &= (9 \cdot 0) + 9 + 9 + 9 + 9 \\ &= \mathbf{0 + 9 + 9 + 9 + 9 = 36} \end{aligned}$$

## Division als wiederholte Subtraktion

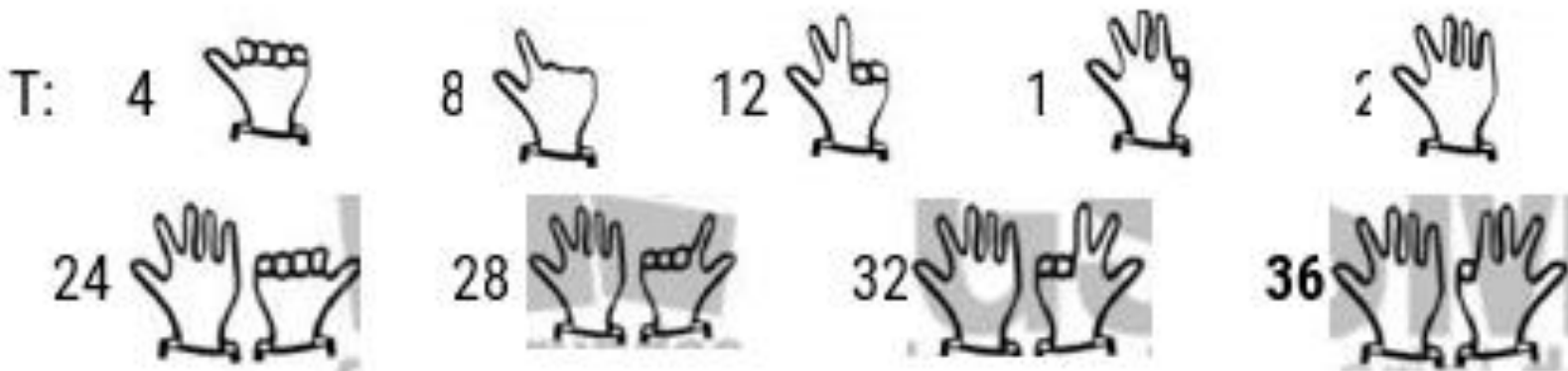
$$0 : m := 0$$

$$n : m := 1 + (n - m) : m$$

$$\begin{aligned} 9 : 3 &= 1 + (9 - 3) : 3 \\ &= 1 + 6 : 3 \\ &= 1 + 1 + (6 - 3) : 3 \\ &= 1 + 1 + 3 : 3 \\ &= 1 + 1 + 1 + (3 - 3) : 3 \\ &= \mathbf{1 + 1 + 1 + 0 : 3 = 3} \end{aligned}$$

# Thekla rechnet $360 : 40$ (3. Klasse)

**T: Wie oft passt die 4 in die 36 rein?**



# Literaturverzeichnis

- Neunzig, W. & Sorger, P. (1971). *Wir lernen Mathematik 1*. Freiburg: Herder.
- Ifrah, G. (2010). *Universalgeschichte der Zahlen*. Berlin: Haffmans & Tolkemitt.