3. Ramsey-Theorie

Aufgabe: Lösung extremaler Existenzprobleme.

„Complete disorder is impossible!“

Leo Motzkin

3.1. Das Dirichletsche Taubenschlagprinzip

Das wohl bekannteste und einfachste Resultat ist das Dirichletsche Taubenschlagrinzip.

Satz 3.1 (Taubenschlagprinzip)
Verteilt man auf k Schubfächer $k+1$ Objekte, so enthält wenigstens eines der Fächer mindestens zwei Objekte.

Eine Verfeinerung dieses Prinzips erzielt man, wenn man in den k Fächern jeweils ein Aufnahmevermögen (Kapazität) $p_k \geqslant 1$ zuordnet und sich dafür interessiert, ob diese Kapazität in mindestens einem der Fächer ausgelastet wird, wenn man eine gewisse Anzahl von Objekten verteilt. Es gilt

Satz 3.2
Verteilt man $(p_1-1)+(p_2-1)+\ldots+(p_k-1)+1$ Objekte auf k Schubfächer mit dem Aufnahmevermögen $p_1,\ldots,p_k$, so ist mindestens eines der Fächer ausgelastet (oder sogar überfüllt).

Beispiel: Sechs Personen treffen aufeinander und je zwei sind entweder miteinander befreundet oder verfeindet. Dann gibt es (stets) eine Gruppe von dreien, die jeweils miteinander befreundet oder verfeindet sind. (Lösung als Graphenproblem [1])

In diesem Beispiel werden Paare aus einer sechselementigen Menge in zwei disjunkte Klassen eingeordnet (Freunde oder Feinde). Egal, wie diese Zuordnung aussieht gibt es in (wenigstens) einer der Klassen eine „homogene“ Dreiergruppe. Allgemein teilen wir $\mathcal{S}^{[r]}$, die r-elementigen Teilmengen einer endlichen Menge S, beliebig in k Klassen ein und versuchen dann Aussagen über die Regelmäßigkeit wenigstens einer der Klassen zu machen. Unter Regelmäßigkeit verstehen wir dabei ein möglichst großes inneres Maß:

Definition 3.1:
Das innere Maß q_r einer Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{S}^{[r]}$ (S endlich, $r \geqslant 1$) ist definiert als

$$q_r(\mathcal{A}) := \max\left\{|A| \,\middle|\, A \subseteq S \textit{ und } A^{[r]} \subseteq \mathcal{A}\right\}$$

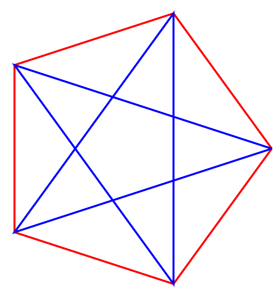
[1] Einschub zur Graphentheorie siehe Anhang

$\underline{r=1:}$ Da man $\mathcal{S}^{[1]}$ mit S indentifizieren kann, ist die Aufteilung hier nichts anderes als die Verteilung der Elemente von S auf Schubfächer, deren inneres Maß q_1 die Anzahl der auf ein Fach (Teilmene von S) entfallenden Elemente ist.

$\underline{r=2:}$ $\mathcal{S}^{[2]}$ veranschaulicht man am Besten durch einen vollständigen Graphen auf $|S|$ Knoten: $K_{|S|}$. Jede Kante entspricht einer 2-elementigen Knoten(teil)menge aus S. Eine Aufteilung der Knotenmenge auf k Klassen kann man dann im graphentheoretischen Sinne als Färbung der Kanten mit k Farben auffassen. Die Kanten einer Farbe bilden dann einen Untergraphen. Dessen inneres Maß ist dann die Mächtigkeit der größten Knotenmenge, deren Knoten in dem jeweiligen Untergraphen paarweise miteinander verbunden sind.

Einen solchen vollständigen Teilgraphen nennt man Clique. Die Kantenfärbung eines Graphen mit zwei Farben entspricht der Beschreibung eines Graphen durch z.B. rot $\triangleq$ „Kante", blau $\triangleq$ „keine Kante". Man sucht dann Cliquen dieses Graphen oder unabhängige Mengen (paarweisen nicht verbundene Knoten).

z.B.: $|S| = 5, k = 2$



Keiner der beiden Untergraphen enthält eine Clique der Größe 3 (Dreieck), beide haben das innere Maß 2.

3.2. Der Satz von Ramsey

Satz 3.3 (Ramsey 1930)
Es sei $r \geqslant 1$ und $k \geqslant 1$ fest. Gibt man natürliche Zahlen $p_1, \dots, p_k \geqslant r$ („Kapazitäten") vor, so gibt es eine Zahl N, so dass gilt:

Zerlegt man die Menge $\mathcal{S}^{[r]}$ mit $|S| \geqslant N$ in k disjunkte Klassen $\mathcal{A}_i$, d.h. $\mathcal{S}^{[r]} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $q_r(\mathcal{A}_j) \geqslant p_j$. Das kleinste solcher $N \in \mathbb{N}$ nennen wir die Ramsey-Zahl

$$R_r(p_1, \dots, p_k).$$

$\underline{r=1:}$ Satz 3.2 besagt

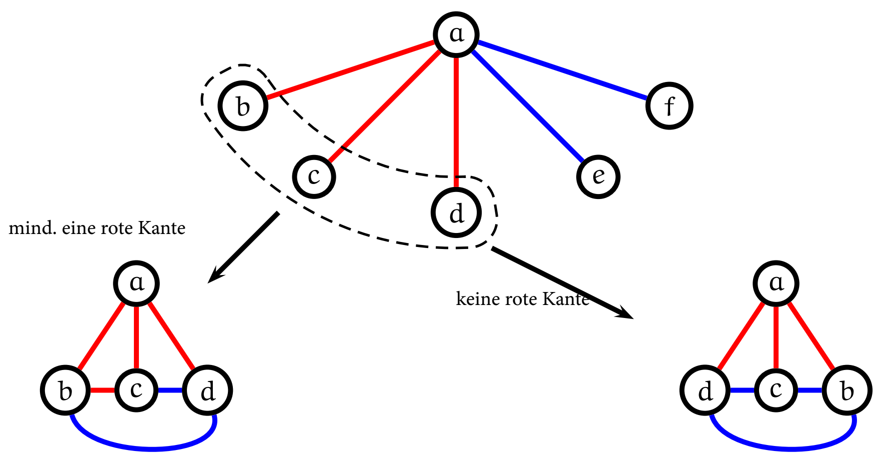
$$R_1(p_1, \dots, p_k) \leqslant p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1.$$

Satz 3.1 besagt

$$R_1(2, \dots, 2) \leqslant k + 1.$$

<u>$r = 2$:</u> Zeige: $R_2(3,3) = 6$

Gezeigt wurde bereits $R(2,3) > 5$. Betrachten nun einen Graphen mit $n = 6$ Knoten: a, b, c, d, e, f. Betrachte a, dann sind von den Kanten drei (oder mehr) rot oder blau. Das ist nichts anderes als Satz 3.2 für $k = 2, p_1 = p_2 = 3$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien ab, ac und ad rote Kanten.



Beweis (des Satzes von Ramsey): Zunächst reduzieren wir das Existenzproblem (der Ramsey-Zahlen) auf den Fall $k = 2$, also auf Zerlegungen in zwei Klassen.

<u>**1.Schritt:**</u> Existiert $R_r(p,q)$ für beliebige $r \geqslant 1$, $p, q \geqslant r$, so existiert $R_r(p_1, \ldots, p_k)$ für beliebige $r, k \geqslant 1$ und $p_1, \ldots, p_p \geqslant r$.

Beweis: Induktion über k:

$k = 1$: $R_r(p) = p$

$k = 2$: Voraussetzung

$k > 3$: Wir geben $p_1, \ldots, p_k$ vor und suchen eine Zahl N, die die Aussage des Satzes erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung existiert

$$N := R_r(p_1, \ldots, p_{k-2}, R_r(p_{k-1}, p_k)),$$

da

$$\max\{2, k-1\} < k \text{ und } R_r(p_{k-1}, p_k) \geqslant \max\{p_{k-1}, p_k\} \geqslant r.$$

Ist S eine Menge mit $|S| \geqslant N$, die in Klassen $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ zerlegt wird, so gilt (nach Wahl von N):

1. $q_r(\mathcal{A}_i) \geqslant p_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ oder
2. $q_r(\mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_k) \geqslant R_r(p_{k-1}, p_k)$,

da man die Zerlegung in k als solche in $k-1$ Klassen $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{k-2}, \mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_k$ auffassen kann.

Aus 2. folgt die Existenz einer Menge $A \subseteq S$ mit $|A| = R_r(p_{k-1}, p_k)$ und $\mathcal{A}^{[r]} \subseteq \mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_k$. $\mathcal{A}^{[r]}$ kann man dann zerlegen in

$$\mathcal{A}^*_{k-1} := \mathcal{A}_{k-1} \cap \mathcal{A}^{[r]} \text{ und } \mathcal{A}^*_k := \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}^{[r]}.$$

Die Mächtigkeit von A garantiert dann

$$q_r(\mathcal{A}^*_{k-1}) \geqslant p_{k-1} \text{ oder } q_r(\mathcal{A}^*_k) \geqslant p_k.$$

Hieraus folgt, da die gesternten Mengen in den ungesternten enthalten sind und das innere Maß monoton ist:

- 2.' $q_r(\mathcal{A}_{k-1}) \geqslant p_{k-1}$ oder $q_r(\mathcal{A}_k) \geqslant p_k$
- 1. und 2.' belegen die gewünsche Eigenschaft von N.

■

Zu zeigen bleibt noch der Fall $k = 2$.

<u>**Schritt 2:**</u> Wenn $R_r(p-1, q)$, $R_r(p, q-1)$ und $R_{r-1}(x, y)$ für beliebige, feste $r \geqslant 2$, $p, q \geqslant r+1$ und alle $x, y \geqslant r-1$ existieren, so existiert auch $R_r(p, q)$.

Beweis: Wir werden von

$$N := R_{r-1}\big(R_r(p-1, q), R_r(p, q-1)\big) + 1$$

zeigen, dass es eine obere Abschätzung für $R_r(p, q)$ darstellt (N existiert nach Voraussetzung).

Sei S also eine Menge mit $|S| \geqslant N$ und $\mathcal{S}^{[r]}$ werde zerlegt in $\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B}$. Wähle ein festes Element a von S ($|S| \geqslant N \geqslant 1$) und bilde $T := S \setminus \{a\}$. Zerlege $\mathcal{T}^{[r-1]}$ folgendermaßen in $\hat{\mathcal{A}} \dot\cup \hat{\mathcal{B}}$:

Falls $A \in \mathcal{T}^{[r-1]}$ sei

$$A \in \hat{\mathcal{A}} \Leftrightarrow A \cup \{a\} \in \mathcal{A}$$
$$A \in \hat{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A \cup \{a\} \in \mathcal{B}.$$

Nach Wahl von N gilt

$$|T| \geqslant R_{r-1}\big(R_r(p-1, q), R_r(p, q-1)\big).$$

Also gilt:

$$q_{r-1}(\hat{\mathcal{A}}) \geqslant R_{r-1}(p-1, q) \text{ oder } q_{r-1}(\hat{\mathcal{B}}) \geqslant R_r(p, q-1).$$

Ohne Einschränkung gelte ersteres. Also gibt es eine Menge $U \subseteq T$ mit $|U| = R_r(p-1, q)$ und $\mathcal{U}^{[r-1]} \subseteq \hat{\mathcal{A}}$. Genau wie im Schritt 1 induziert nun die Zerlegung $\mathcal{S}^{[r]} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ eine Zerlegung

$$\mathcal{U}^{[r]} = \mathcal{A}^* \cup \mathcal{B}^* = \left(\mathcal{A} \cap \mathcal{U}^{[r]}\right) \cup \left(\mathcal{B} \cap \mathcal{U}^{[r]}\right)$$

und auch hier garantiert die Mächtigkeit von U

$$q_r(\mathcal{A}) \geqslant p - 1 \text{ oder } q_r(\mathcal{B}) \geqslant q. \tag{3.1}$$

Gilt $q_r(\mathcal{A}) \geqslant p - 1$, so gibt es ein $V \subseteq U$ mit $|V| = p - 1$ und $\mathcal{V}^{[r]} \subseteq \mathcal{A}$. Es sei nun $W := V \cup \{a\}$. Also $|W| = p$ und sogar $\mathcal{W}^{[r]} \subseteq \mathcal{A}$, denn für ein $M \in \mathcal{W}^{[r]}$ gilt

(i) $a \notin M \Rightarrow M \in \mathcal{V}^{[r]} \Rightarrow M \in \mathcal{A}$ oder

(ii) $a \in M \Rightarrow M = X \cup \{a\}$ mit $|X| = r - 1$ und $X \subset V$, also $X \in \mathcal{U}^{[r-1]} \subseteq \hat{\mathcal{A}}$.

Nach Konstruktion von $\hat{\mathcal{A}}$ gilt dann $M \in \mathcal{A}$. Also belegt W, dass $q_r(\mathcal{A}) \geqslant p$ ist und daraus folgt mit (3.1) die Behauptung.

■

<u>Schritt 3:</u> $R_r(p, q)$ existiert für beliebige Zahlen $r \geqslant 1$ und $p, q \geqslant r$.

Beweis: Beweis mittels geschachtelter Induktion über r und $p + q$:

$r = 1$: $R_1(p, q) = p + q - 1$

$r > 1$:
- $p + q = 2r$: $R_r(r, r) = r$
- $p + q > 2r$:

  (i) $p = r$ oder $q = r$, dann gilt

  $$R_r(p, q) \leqslant \max\{p, q\}.$$

  (ii) $p, q \geqslant r + 1$, dann gilt, dass

  $$R_r(p - 1, q) \text{ und } R_r(p, q - 1)$$

  existieren (Annahme der inneren Induktion).

  $R_{r-1}(x, y)$ existiert (Annahme der äußeren Induktion), also folgt aus Schritt 2 die Behauptung.

■

■