

Mathematik III (für IF, ET, Ph)

Wintersemester 2023/24

9. Übung: Algebraische Strukturen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass (\mathbb{Z}, \circ) mit der Operation $a \circ b := a + b - ab$ eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Falls ja, welche Elemente besitzen Inverse?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Beispiele sind Gruppen? Dabei bezeichnen $+$ und \cdot die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

- a) $(G, +)$ mit $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,
- b) (G, \cdot) mit $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,
- c) $(G, +)$ mit $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$,
- d) (G, \cdot) mit $G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Untergruppen der folgenden zyklischen Gruppe

$$G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}.$$

Welche dieser Untergruppen ist ein Normalteiler von G ?

Aufgabe 4

Geben sei die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

sowie folgende Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$$(a + b\sqrt{5}) \oplus (c + d\sqrt{5}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{5},$$

$$(a + b\sqrt{5}) \odot (c + d\sqrt{5}) := (a \cdot c + 5 \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{5}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \oplus, \odot)$ ein Körper ist.

Hinweis: Erinnern Sie die Definition der Operationen auf $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ an etwas? Z.B. an die Operationen auf einer ähnlich definierten Menge mit reellen Koeffizienten a, b aus Mathematik I?

Aufgabe 5

- (a) Es sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Untersuchen Sie die Relationen \subseteq und $\not\subseteq$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
- (b) Es sei $M = \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

$$(a, b) R (c, d) \iff (a, b) = (c, d) \text{ oder } (a, b) = (d, c)$$

eine Äquivalenzrelation auf $M \times M$ ist. In wie viele Äquivalenzklassen teilt R die Menge $M \times M$?

Aufgabe 6

Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen für \mathbb{Z}_3 und \mathbb{Z}_6 auf.

Verifizieren Sie mittels dieser Tabellen, dass $(\mathbb{Z}_3, +)$, $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot)$ sowie $(\mathbb{Z}_6, +)$ Gruppen sind, $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ allerdings keine Gruppe ist.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die folgenden additiven Inversen

a) zu 1 in \mathbb{Z}_{20} , b) zu 4 in \mathbb{Z}_{12} , c) zu 199 in \mathbb{Z}_{200} ,

sowie die folgenden multiplikativen Inversen

d) zu 2 in \mathbb{Z}_7 , e) zu 7 in \mathbb{Z}_{23} , f) zu 10 in \mathbb{Z}_{51} .

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Inversen in der Gruppe $(\mathbb{Z}_{457}, \cdot)$ zu

a) 12, b) 200, c) 400

mittels des euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 9

In welchem endlichen Körper gilt "25 divided by 5 is 14" ?

Tipp: Googeln Sie mal nach dieser englischen Aussage und genießen Sie das Video.