

Themenblock 3

Aufgaben mit Lösungshilfe Für die nachfolgenden Aufgaben werden Lösungshinweise / -wege bereitgestellt. Bitte vollziehen Sie die einzelnen Lösungsschritte nach und diskutieren Sie alternative Lösungen.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung

(a) $x^2 + 4 = 0$ (b) $2x^2 - x + 6 = 0$ (c) $x^4 + x^2 + \frac{25}{64} = 0$ (d) $x^6 + 2x^3 + 2 = 0$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung $z^2 - 8z + t^2 = 0$ genau

- (i) zwei verschiedene reelle
- (ii) eine (doppelt zu zählende) reelle
- (iii) zwei konjugiert komplexe

Lösungen besitzt. Geben Sie die Lösungen jeweils an.

Aufgabe 3:

In algebraischen Gleichungen mit ausschließlich reellen Koeffizienten treten komplexe nichtreelle Lösungen paarweise konjugiert auf.

(a) Berechnen Sie für das Polynom

$$p_3(z) = z^3 + 3z^2 + 9z - 13 \quad (z \in \mathbb{C})$$

die Produktdarstellung in Linearfaktoren.

(b) Zeigen Sie, dass $z_1 = 2 - i$ eine Lösung der Gleichung

$$z^4 - \frac{7}{2}z^3 - 2z^2 + \frac{45}{2}z - 25 = 0$$

ist. Zerlegen Sie das Polynom auf der linken Seite der Gleichung in Linearfaktoren.

(c) Zerlegen Sie das Polynom $p_4(z) = z^4 + 4$ in zwei reelle quadratische Faktoren.

(d) Prüfen Sie, welche der ganzen Zahlen $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ und $x_3 = -5$ Lösungen der algebraischen Gleichung $p_4(x) = 0$ mit

$$p_4(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$$

sind und dividieren Sie $p_4(x)$ durch die Terme $(x - x_j)$ für jedes $j \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Aufgabe 4:

Spalten Sie so oft wie möglich die Nullstelle $x = -1$ vom Polynom $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ ab und faktorisieren Sie es!

Aufgabe 5:

Lösen Sie die folgenden algebraischen Gleichungen und Ungleichungen.

- (a) $5x^2 + 2x - 2 = x - 1 - x^2$ (d) $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$
 (b) $x - 2 \geq 2x - \frac{1}{2}$ (e) $x^2 + 4x + 13 \leq 0$
 (c) $3x^2 + x + 9 > 13x - 3$ (f) $x^2 - 5x + 6 > 0$

Aufgabe 6:

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die nachstehende Aussage.

Für eine beliebige algebraische Gleichung $p_n(x) = 0$ mit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot x^i)$$

den Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $a_n = 1$ sowie den Lösungen

$$x_1 \in \mathbb{C}, \quad x_2 \in \mathbb{C}, \quad \dots \quad x_n \in \mathbb{C}$$

gelten die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n x_j = -a_{n-1} \tag{1}$$

$$\sum_{j_1 < j_2} (x_{j_1} \cdot x_{j_2}) = a_{n-2} \tag{2}$$

$$\sum_{j_1 < j_2 < j_3} (x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot x_{j_3}) = -a_{n-3} \tag{3}$$

\vdots

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0 \tag{4}$$

wobei über $j_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$ summiert wird.

Aufgabe 7:

Zerlegen Sie die nachstehenden rationalen Funktionen $f : x \mapsto y = f(x)$ mit $x \in D \subset \mathbb{R}$ in eine Summe aus ganzrationalem und echt gebrochen rationalem Anteil.

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen qualitativ (ohne Funktionswerte zu bestimmen).

$$f(x) = \frac{x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4}{x^4 + 2x^2 + 1} \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{x^8 - x^4 + 2x - 1}{x^2 - 1} \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (3x - 4) \cdot (x^2 + 1)}{(2x - 6) \cdot (x^2 - 1)} \tag{7}$$

Aufgabe 8:

Gegeben ist die reelle Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = x^5 - 6 \cdot x^4 + 12 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 27 \cdot x$$

Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens alle Nullstellen von h .

Selbständige Bearbeitung Die nachfolgenden Aufgaben knüpfen an den 'Aufgaben mit Lösungshilfe' an. Bearbeiten Sie diese individuell und teilen Sie Ihre Lösungen mit anderen. So können Lösungshinweise gegeben bzw. Lösungen verglichen werden.

Aufgabe 9:

Zerlegen Sie die ganzen Zahlen 2, 5 und 13 jeweils unter Verwendung von $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ in ein Produkt komplex konjugierter Zahlen mit ganzzahligen Real- und Imaginärteilen.

Aufgabe 10:

Gegeben ist die algebraische Gleichung $p(z) = 0$ mit

$$p(z) = z^5 - 4 \cdot z^4 + 6 \cdot z^3 - 6 \cdot z^2 + 5 \cdot z - 2, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

- (a) Entscheiden und begründen Sie, welche der Zahlen ± 1 , ± 2 bzw. ± 3 Lösungen der Gleichung $p(z) = 0$ sind und welche nicht.
- (b) Berechnen Sie alle Lösungen von $p(z) = 0$ mittels Polynomdivision oder eines entsprechenden (schriftlichen!) Verfahrens. Zerlegen Sie das Polynom (8) in Linearfaktoren.

Aufgabe 11:

Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Zahlen z , welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

- (a) $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0$
- (b) $|z| = 2 \quad \wedge \quad (z - i) \in \mathbb{R}$

Aufgabe 12:

Gegeben ist die reelle Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = x^5 - x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$$

Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten schriftlichen Verfahrens alle Nullstellen von h .

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die Werte von $f(x)$ an den angegebenen Stellen und bestimmen Sie die Zerlegung von f in reelle Elementarfunktionen (d.h. lineare oder quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten)

- (a) $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 4$, Stellen: $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 2$
- (b) $f(x) = 2x^7 - x^6 + 2x^5 + 71x^4 + 68x^3 - 52x^2$, Stellen: $x_0 = -3, x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$