

Aufgabe 3.2

a. Zeigen Sie, dass die Formeln $p \rightarrow q$ und $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ äquivalent sind.

$$p \rightarrow q \quad \equiv \quad (\neg q) \rightarrow (\neg p)$$

Wahrheitstabelle:

p	q	$p \rightarrow q$	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Die Wahrheitstabelle belegt, dass das Ergebnis für die Eingabenvariablen $W:\{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$ in beiden Formeln die gleichen Ergebnisse heraus kommen. Damit ist die Äquivalenz der beiden Formeln bewiesen.

$$W(p \rightarrow q) = W(\neg q) \rightarrow (\neg p)$$

b. Zeigen Sie, dass die Formeln $\neg(p \rightarrow q)$ und $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$ nicht äquivalent sind,

Hinweis: Finden Sie dazu wenigstens eine Belegung $W : \{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$W(\neg(p \rightarrow q)) \neq W((\neg p) \rightarrow (\neg q))$$

$$\neg(p \rightarrow q) \not\equiv (\neg p) \rightarrow (\neg q)$$

Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg(p \rightarrow q)$	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$(\neg p) \rightarrow (\neg q)$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1

Die Wahrheitstabelle belegt, dass das Ergebnis für die Eingabenvariablen $\{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$ in beiden Formeln verschiedene Ergebnisse heraus kommen.

Damit ist die Antivalenz der beiden Formeln bewiesen.

c. Stellen Sie für die folgenden Paare von Formeln ϕ_i und ψ_i jeweils fest, ob $\phi_i \equiv \psi_i$ gilt:

$$\phi_1 = \neg(p \vee q) \quad \psi_1 = (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\phi_2 = p \rightarrow (q \rightarrow p) \quad \psi_2 = \top$$

$$\text{IA: } \phi_1 \quad \equiv \quad \psi_1 \quad ???$$

$$\text{IS: } \phi_1 = \{W_{01}\} \quad \neq \quad \psi_1 = \{W_{01}\}$$

$$\text{IB: } \phi_1 \quad \not\equiv \quad \psi_1 \quad !!!$$

$$\text{IA: } \phi_2 \quad \equiv \quad \psi_2 \quad ???$$

$$\text{IS: } \phi_1 = \text{Mod}(\phi_1) = \{W : P \rightarrow \{0, 1\}\} = \top$$

$$\text{IB: } \phi_2 \quad \equiv \quad \psi_2 \quad !!!$$